Code branche	Ministère de l'Education nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	
MATHE II	EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – **Session 2013/2014**	
Épreuve	*Branche*	*Division / Section*
écrite		
Durée épreuve		
2 h 00	**Mathématiques II**	**GE**
Date épreuve		
15. 09. 2014		

Question 1 — $5+2+5=12$ points

Considérons les nombres complexes :

$$z_1=\frac{4}{1+i\sqrt{3}} \qquad z_2=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3} \qquad z_3=-2\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(a) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

(b) En déduire que le nombre $Z=\frac{(\overline{z_1})^5}{(z_2)^7}$ est imaginaire pur.

(c) Exprimer $Z'=z_1\cdot z_3$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle et en tirer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Question 2 — $3+3=6$ points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant la condition suivante :

$$\left|iz+3+i\right|=\left|\overline{z}-2-i\right|$$

Décrire l'ensemble $\mathscr{E}$:

(a) par la *méthode analytique*, en posant $z=x+iy$ (avec $x,y\in\mathbb{R}$) ;

(b) par la *méthode géométrique*, en interprétant la condition.

Question 3 — 5 points

Démontrer le théorème suivant :

Si dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on a : $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$, alors les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont :

$$\Big(yz'-zy'\,;\ -(xz'-zx')\,;\ xy'-yx'\Big)$$

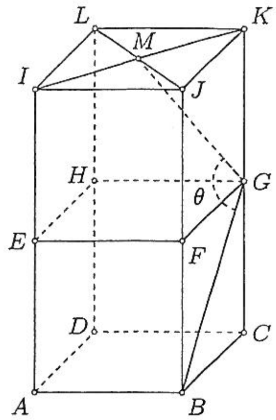
Question 4 $\hfill$ $4+2+6=12$ points

Deux cubes sont superposés comme l'indique la figure ci-contre. Le point M est le centre de la face $IJKL$. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA},\,\overrightarrow{DC},\,\overrightarrow{DH}\right)$.

(a) Notons θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GM}$. Calculer la valeur approchée de θ au dixième de degré près.

(b) Donner une représentation paramétrique de la droite (CI) et de la droite (EM).

(c) Étudier la position relative de ces deux droites.



Question 5 $\hfill$ $1+2+2+1+3+2=11$ points

Relativement au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, considérons les points $A(1;-2;3)$, $B(-1;-3;5)$, $C(3;0;2)$ et $D(-6;2;-8)$, et soit d la droite définie par :

$$d\colon \begin{cases} x=3t \\ y=-2-2t \\ z=-4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

(a) Montrer que A, B et C définissent un plan.

(b) Vérifier que la droite d est perpendiculaire au plan (ABC).

(c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(d) Vérifier que $D\in d$.

(e) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC).

(f) En déduire la distance exacte du point D au plan (ABC).

Question 6 $\hfill$ $4+6+4=14$ points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(4;1;-1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}=3\vec{\imath}-\vec{k}$ et $\vec{v}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. Les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont définis par $\mathcal{Q}\colon x+2y+z-1=0$ et $\mathcal{R}\colon x+2z+1=0$.

(a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

(c) Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

Q1 (a) Exprimons z_1 sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\,(1-i\sqrt{3})}{4} \\ &= 1-i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Comme $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$, on a, en notant $\theta_1 = \arg(z_1) \pmod{2\pi}$:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \tfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

D'où : $\boxed{z_1 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}$. Pour z_2, remarquons que :

$$\begin{aligned} z_2 &= \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}}$. Finalement :

$$z_3 = -2\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\,e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

c'est-à-dire : $\boxed{z_3 = 2\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

(b) Z est bien imaginaire pur, car d'après (a) :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7} \\ &= \frac{32\,e^{i\frac{5\pi}{3}}}{e^{i\frac{7\pi}{6}}} \\ &= 32\,e^{i\left(\frac{10\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)} \\ &= 32\,e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= \boxed{32\,i} \end{aligned}$$

(c) Sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} Z' &= \left(1-i\sqrt{3}\right)\cdot 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(1-i\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) \\ &= -\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Sous forme exponentielle :

$$Z' = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot 2\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\,e^{i\frac{5\pi}{12}} \qquad (\ddagger)$$

De ($\dagger$) et ($\ddagger$), on déduit que :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{5\pi}{12}} &= \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\Re\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \boxed{\cos\tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Im\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \boxed{\sin\tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

Q2 (a) Posons $z = x+iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} & |iz+3+i| = |\bar{z}-2-i| \\ \Longleftrightarrow\ & |(3-y)+i\,(x+1)| = |(x-2)+i\,(-1-y)| \\ \overset{()^2}{\Longleftrightarrow}\ & (3-y)^2+(x+1)^2 = (x-2)^2+(-1-y)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 9-6y+2x+1 = -4x+4+1+2y \\ \Longleftrightarrow\ & 6x-8y+5=0 \end{aligned}$$

L'ensemble de points $\mathscr{E}$ cherché est donc la $\boxed{\text{droite}}$ d'équation cartésienne : $6x-8y+5=0$.

(b) Interprétons la condition :

$$\begin{aligned} & |\,iz+3+i\,| = |\,\bar{z}-2-i\,| \\ \Longleftrightarrow\ & |\,i\,(z-3i+1)\,| = |\,\overline{\bar{z}-2-i}\,| \\ \Longleftrightarrow\ & \underbrace{|\,i\,|}_{=1}\cdot|\,z+1-3i\,| = |\,z-2+i\,| \\ \Longleftrightarrow\ & |\,z-(-1+3i)\,| = |\,z-(2-i)\,| \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ cherché est donc la $\boxed{\text{médiatrice}}$ de $[AB]$ avec $A(-1+3i)$ et $B(2-i)$.

Q3 Voir recueil p. 7

Q4 (a) Relativement au repère indiqué, on a $B(1;1;0)$, $G(0;1;1)$ et $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right)$, d'où l'on tire que :

$$\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GM} = 1\cdot\tfrac{1}{2} + 0\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + (-1)\cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$\|\overrightarrow{GB}\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{GM}\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+1^2} = \tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

Ainsi donc :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GM}}{\|\overrightarrow{GB}\|\cdot\|\overrightarrow{GM}\|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

On conclut que : $\boxed{\theta \simeq 106{,}8°}$

(b) Les coordonnées de C, I et E sont données par $C(0;1;0)$, $I(1;0;2)$ et $E(1;0;1)$. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CI}\,(1;-1;2)$ est un vecteur directeur de (CI) :

$$\boxed{(CI)\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}}$$

De même, le vecteur $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{EM}\,(-1;1;2)$ est un vecteur directeur de (EM). Ainsi :

$$\boxed{(EM)\colon \begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \qquad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2s \end{cases}}$$

(c) (CI) et (EM) sont-elles parallèles ?

$$\begin{aligned} & (CI) \text{ et } (EM) \text{ sont parallèles} \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{R}\colon \vec{u} = k \cdot \vec{v} \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} 1 = k \cdot (-1) \\ -1 = k \cdot 1 \\ 2 = k \cdot 2 \end{cases} \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible, donc les droites (CI) et (EM) ne sont *ni strictement parallèles, ni confondues*. Est-ce que les droites (CI) et (EM) sont sécantes ?

$$\begin{aligned} & (CI) \text{ et } (EM) \text{ sont sécantes} \\ \iff\ & \exists!(t;s)\colon \begin{cases} t = 1 - s \\ 1 - t = s & | \cdot 2 \\ 2t = 1 + 2s \end{cases} \\ \iff\ & \exists!(t;s)\colon \begin{cases} t + s = 1 & (1) \\ 2t + 2s = 2 & (2) \\ 2t - 2s = 1 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre (2) et (3), on obtient :

$$4t = 3 \iff \boxed{t = \tfrac{3}{4}}$$

Remplaçons dans (2) :

$$2 \cdot \frac{3}{4} + 2s = 2 \iff 2s = \frac{1}{2} \iff \boxed{s = \tfrac{1}{4}}$$

L'équation (1) est aussi vérifiée : $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \overset{!}{=} 1$. Donc le couple $(t;s) = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$ convient ! Les droites (CI) et (EM) sont donc *sécantes* (en $N\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$).

Q5 (a) Montrons que A, B et C ne sont pas alignés :

$$\begin{aligned} & A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{R}\colon \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} -2 = k \cdot 2 \\ -1 = k \cdot 2 \\ 2 = k \cdot (-1) \end{cases} \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} k = -1 \\ k = -\frac{1}{2} \\ k = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible, donc les points A, B et C définissent bien un plan.

(b) Notons $\vec{u}\,(3;-2;2)$ un vecteur directeur de d. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{aligned} & d \perp (ABC) \\ \iff\ & \begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} -6 + 2 + 4 \overset{!}{=} 0 \\ 6 - 4 - 2 \overset{!}{=} 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Par (b), $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC) :

$$\begin{aligned} & M(x;y;z) \in (ABC) \\ \iff\ & \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\ \iff\ & (x-1) \cdot 3 + (y+2) \cdot (-2) + (z-3) \cdot 2 = 0 \\ \iff\ & 3x - 2y + 2z - 13 = 0 \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(ABC)\colon 3x - 2y + 2z - 13 = 0}$.

(d) D appartient bien à d :

$$\begin{aligned} D \in d \iff\ & \exists t \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} -6 = 3t \\ 2 = -2 - 2t \\ -8 = -4 + 2t \end{cases} \\ \iff\ & \exists t \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) H est le point d'intersection de d et (ABC) :

$$H(x;y;z) \in d \cap (ABC)$$
$$\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z - 13 = 0 \\ x = 3t \\ y = -2 - 2t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 9t + 4 + 4t - 8 + 4t - 13 = 0 \\ x = 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t = 1 \\ x = 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\boxed{H(3;-4;-2)}$.

(f) La distance de D au plan (ABC) est donnée par :

$$\|\overrightarrow{DH}\| = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{153} = \boxed{3\sqrt{17}}$$

Q6 (a) Calculons avec $\vec{u}(3;0;-1)$ et $\vec{v}(2;1;0)$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ -(3 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) \\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à $\mathcal{P}$:

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P}$$
$$\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 0$$
$$\iff (x-4) \cdot 1 + (y-1) \cdot (-2) + (z+1) \cdot 3 = 0$$
$$\iff x - 2y + 3z + 1 = 0$$

Donc : $\boxed{\mathcal{P} \colon x - 2y + 3z + 1 = 0}$.

(b) Notons $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(1;2;1)$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ sont parallèles}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \colon \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = k \cdot \overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \colon \begin{cases} 1 = k \cdot 1 \\ -2 = k \cdot 2 \\ 3 = k \cdot 1 \end{cases}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \colon \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \\ k = 3 \end{cases}$$

ce qui est impossible ! Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite Δ :

$$M(x;y;z) \in \Delta \iff \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 & (1) \\ x + 2y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (2) de (1) :

$$-4y + 2z + 2 = 0 \iff \boxed{z = 2y - 1} \qquad (3)$$

Remplaçons (3) dans (1) :

$$x - 2y + 3(2y-1) + 1 = 0 \iff \boxed{x = -4y + 2}$$

En posant : $y = t$ $(t \in \mathbb{R})$, on a finalement :

$$\boxed{\Delta \colon \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + 2t \end{cases}}$$

(c) Notons $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(1;0;2)$ un vecteur normal à $\mathcal{R}$ et $\vec{w}(-4;1;2)$ un vecteur directeur de Δ. $\mathcal{R}$ et Δ sont parallèles si et seulement si :

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}} \cdot \vec{w} = 0 \iff 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \overset{!}{=} 0$$

De plus, le point $B(2;0;-1)$ appartient à Δ (en choisissant $t = 0$), mais $B \notin \mathcal{R}$ car :

$$2 + 2 \cdot (-1) + 1 \neq 0$$

Donc $\mathcal{R}$ et Δ sont *strictement parallèles*, ce qui implique que les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ n'ont $\boxed{\text{aucun point commun}}$.