Code branche	Ministère de l'Education nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	
MATHE I	EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – **Session 2013/2014**	
Épreuve **écrite**	*Branche*	*Division / Section*
Durée épreuve **3h**	**Mathématiques I**	**GE / GI**
Date épreuve 14.05.2014		

Question I (4+4 = 8 points)

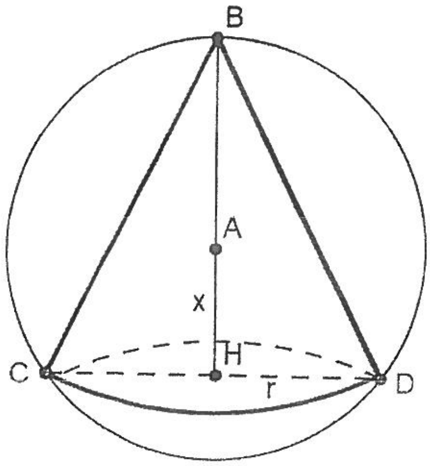
1) Démontrer le théorème suivant :

« Pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$ »

2) Démontrer le théorème suivant :

« Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. »

Question II (3+1+3 = 7 points)



Dans une sphère de centre A et de rayon 6 cm, on inscrit un cône de révolution de rayon r cm et de hauteur BH $\geq$ 6 cm.

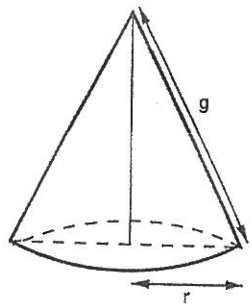
On note x la distance AH exprimée en cm, avec $x \in [0;6[$.

1) Exprimer BH, puis HD et BD en fonction de x.

2) Montrer que l'aire latérale (*) exprimée en cm^2 de ce cône est égale à $A(x)=2\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\sqrt{-x^3-6x^2+36x+216}$

3) Déterminer les dimensions (rayon et hauteur) du cône dont l'aire latérale est maximale.

(*) Pour calculer l'aire latérale du cône, utiliser la formule suivante : $A=\pi\cdot r\cdot g$



Le Commissaire du Gouvernement

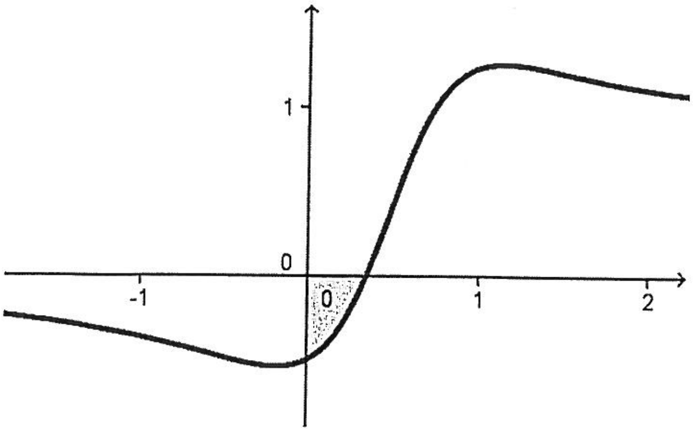
Question III (1+5 = 6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x}dx$

$J = \int_0^1 (x^2+2x)e^{x+1}dx$

Question IV (5+3+2+7+3 = 20 points)



Voici la représentation graphique C_f de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x+1}$.

1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que C_f admet deux asymptotes horizontales et écrire pour chacune une équation.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2h(x)}{(e^{2x}-4x+1)^2}$, avec : $h(x) = -4xe^{2x} + 5e^{2x} - 4$.
4) Etudier les variations de la fonction h et en déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β. Encadrer α et β à 0,01 près.
5) Déterminer l'abscisse du point d'intersection I de C_f et de l'axe des abscisses, puis calculer l'aire de la surface grisée.

Question V ((1+3)+6+4 = 14 points)

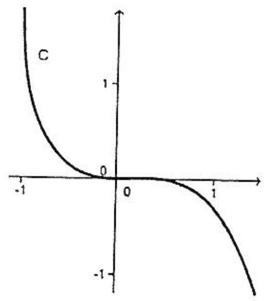
1) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1+\dfrac{\ln(x)}{x-1} & ,\text{si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ 4 & ,\text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que cette fonction est continue en $x = 1$.

b) Montrer que la courbe représentative C_f de cette fonction admet deux asymptotes et indiquer pour chacune une équation.

2) Résoudre l'équation suivante : $\ln(x+1) - \ln\sqrt{4-x} = \dfrac{1}{2}\ln(x+3)$.

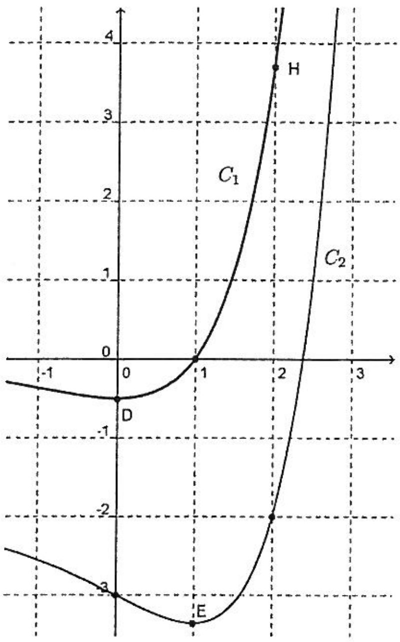


3) La courbe C représente la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - 2x^3 + x - \ln(x+1)\right).$$

La fonction h semble être décroissante sur $]-1;+\infty[$.
Est-ce le cas ? Justifier !

Question VI ((2+1)+2 = 5 points)



1) Voici les courbes représentatives d'une fonction f et d'une de ses primitives F.

On sait que la tangente en E à la courbe C_2 est horizontale, que l'ordonnée de D est $-\dfrac{1}{2}$ et que l'ordonnée de H est $\dfrac{e^2}{2}$.

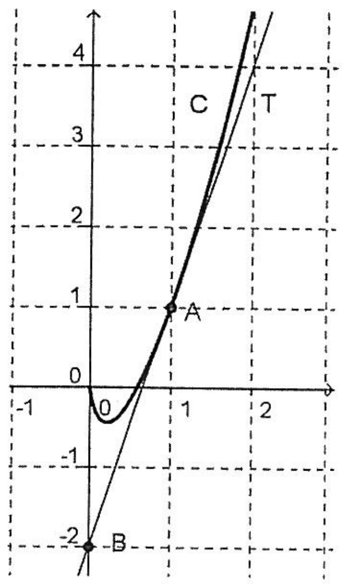
a) Attribuer à chaque fonction la courbe qui convient. Justifier.

b) Calculer : $\int_0^2 f(x)dx$.

2) La courbe C représente la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = ax\ln(x) + bx$, où a et b sont deux nombres réels.

On sait que T est la tangente à C en A.

Déterminer les réels a et b.

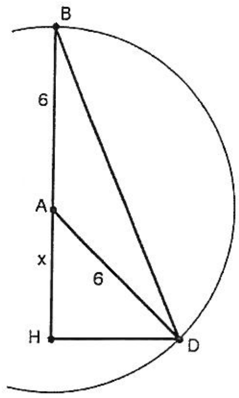


Corrigé

Question I (4+4 = 8 points)

voir recueil : Théorèmes II1 et I1.

Question II (3+1+3 = 7 points)



1) $BH = x+6$

Triangle AHD

Par Pythagore :

$AD^2 = AH^2 + HD^2$

$36 = HD^2 + x^2$

$HD = \sqrt{36-x^2}$

Triangle BHD

Par Pythagore :

$BD^2 = BH^2 + HD^2$

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x+6)^2 + 36 - x^2 \\ &= x^2 + 12x + 36 + 36 - x^2 \\ &= 72 + 12x \\ &= 12(6+x) \end{aligned}$$

$BD = \sqrt{12(6+x)} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+x}$

2) $A = \pi \cdot HD \cdot BD$

$\forall x \in [0;6[$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\cdot\sqrt{36-x^2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+x} \\ &= 2\sqrt{3}\pi\cdot\sqrt{(36-x^2)\cdot(6+x)} \\ &= 2\sqrt{3}\pi\cdot\sqrt{216+36x-6x^2-x^3} \end{aligned}$$

3) $\forall x \in [0;6[$:

$$A'(x) = 2\sqrt{3}\pi\cdot\frac{36-12x-3x^2}{2\sqrt{216+36x-6x^2-x^3}} = 3\sqrt{3}\pi\cdot\frac{-x^2-4x+12}{\sqrt{216+36x-6x^2-x^3}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$-x^2-4x+12 = 0 \quad \Delta = 16+48 = 64$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4-8}{-2} = 2$ ou $x = \dfrac{4+8}{-2} = -6$

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-x^2-4x+12$		-	0	+	0	-	

x	0		2		6
A'(x)		+	0	-	
A		↗	max	↘	

L'aire est maximale pour $x = 2$.

Le cône a alors un rayon de $\sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ cm et une hauteur de 8cm.

Question III (1+5 = 6 points)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)e^{u(x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x^2+2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^3-1\right) \approx 9{,}54 \end{aligned}$$

$u(x) = x^2+2x$

$u'(x) = 2x+2 = 2(x+1) \,\Big|\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}u'(x) = x+1$

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^1 (x^2+2x)e^{x+1}dx \\
&= \left[(x^2+2x)e^{x+1}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (x+1)e^{x+1}dx \\
&= 3e^2 - 0 - 2\left(\left[(x+1)e^{x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx\right) \\
&= 3e^2 - 2\left(2e^2 - e - \left[e^{x+1}\right]_0^1\right) \\
&= 3e^2 - 4e^2 + 2e + 2(e^2 - e) \\
&= e^2
\end{aligned}
$$

$$
\left| \begin{array}{ll} u_1(x) = x^2+2x & v'(x) = e^{x+1} \\ u_1'(x) = 2x+2 & v(x) = e^{x+1} \end{array} \right.
$$

$$
\left| \begin{array}{ll} u_2(x) = x+1 & v'(x) = e^{x+1} \\ u_2'(x) = 1 & v(x) = e^{x+1} \end{array} \right.
$$

Question IV (5+3+2+7+3 = 20 points)

$$f(x) = \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x+1}$$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - 4x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2e^{2x} - 4 = 2\left(e^{2x}-2\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} \overset{>}{=} 2 \Leftrightarrow 2x \overset{>}{=} \ln 2 \qquad |\ln \text{ str.} \nearrow$$

$$\Leftrightarrow x \overset{>}{=} \frac{\ln 2}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$\searrow$	$3-2\ln(2)$	$\nearrow$

$$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 2 - 2\ln(2) + 1 = 3 - 2\ln(2) \approx 1,6$$

$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) > 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}-2}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}-4x+1}_{\to +\infty}} = 0$$ A.H. en $-\infty$ d'équation : $y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1-\frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1-\frac{4x}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{2}{e^{2x}}}^{\to 0}}{1-4\cdot\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}} = 1$$

A.H. en $+\infty$ d'équation : $y = 1$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}-4x+1)-(e^{2x}-2)(2e^{2x}-4)}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{4x}-8xe^{2x}+2e^{2x}-(2e^{4x}-4e^{2x}-4e^{2x}+8)}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-8xe^{2x}+10e^{2x}-8}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$= \frac{2(-4xe^{2x}-4+5e^{2x})}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$= \frac{2\cdot h(x)}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

avec $h(x) = -4x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}-4$.

4) $\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) = -4\mathrm{e}^{2x}-4x\cdot 2\mathrm{e}^{2x}+5\cdot 2\mathrm{e}^{2x}-0 = (6-8x)\mathrm{e}^{2x} = \underbrace{2}_{>0}(3-4x)\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{>0}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	-4	$\nearrow$	$2e^{\frac{3}{2}}-4$	$\searrow$	$-\infty$

$h(\frac{3}{4}) = -3\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}+5\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-4 = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-4 \approx 4{,}96 > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-4x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}-4\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-4\underbrace{x\mathrm{e}^{x}}_{\to 0}\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{\to 0}+5\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{\to 0}-4\right) = -4$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-4x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}-4\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{(-4x+5)}_{\to-\infty}\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{\to+\infty}-4\right) = -\infty$$

- h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;\frac{3}{4}]$ et $h(]-\infty;\frac{3}{4}]) =]-4;2e^{\frac{3}{2}}-4]$ et $0 \in]-4;2e^{\frac{3}{2}}-4]$, donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty;\frac{3}{4}]$.
- h est continue et strictement décroissante sur $]\frac{3}{4};+\infty[$ et $h(]\frac{3}{4};+\infty[) =]2e^{\frac{3}{2}}-4;-\infty[$ et $0 \in]2e^{\frac{3}{2}}-4;-\infty[$, donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique $\beta \in]\frac{3}{4};+\infty[$.

$-0{,}18 < \alpha < -0{,}17$ et $1{,}14 < \beta < 1{,}15$

5) $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 2}{2}$

$$A=-\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln(e^{2x}-4x+1)\Big]_0^{\frac{\ln 2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln\big(2-2\ln(2)+1\big)-\ln 2\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln\big(3-2\ln(2)\big)-\ln 2\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{2}{3-2\ln(2)}\right]\approx 0{,}107\,u.a.$$

$g(x)=e^{2x}-4x+1>0$

$g'(x)=2(e^{2x}-2x) \quad \Big|\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}g'(x)=e^{2x}-2x$

Question V ((1+3)+6+4 = 14 points)

1) **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[2x+1+\dfrac{\ln(x)}{\underbrace{x-1}_{\to 1}}\right]=4\overset{!}{=}f(1)$. Donc f est continue en $x=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\underbrace{2x}_{\to 0}+1+\underbrace{\dfrac{\overbrace{\ln(x)}^{\to-\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to -1}}}_{\to+\infty}\right]=+\infty$. L'axe $(Oy): x=0$ est asymptote verticale à C_f.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{2x}_{\to+\infty}+1+\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to+\infty}}\right] \quad f.i.$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{2x}_{\to+\infty}+1+\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\cdot\frac{1}{\underbrace{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}_{\to 1}}\right]=+\infty$$

$d: y=2x+1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$, car :

$$\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-(2x+1)\big]=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\cdot\frac{1}{\underbrace{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}_{\to 1}}=0$$

2) $\ln(x+1)-\ln\sqrt{4-x}=\frac{1}{2}\ln(x+3)$

Conditions :

$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$4-x>0 \Leftrightarrow x<4 \qquad D=]-1;4[$

$x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

$\forall x \in D$:

$$\ln(x+1)-\ln\sqrt{4-x}=\frac{1}{2}\ln(x+3)$$

$$\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(4-\mathrm{x})=\frac{1}{2}\ln(x+3) \qquad |\cdot 2$$

$$2\ln(x+1)-\ln(4-\mathrm{x})=\ln(x+3) \qquad |+\ln(4-x)$$

$$\ln(x+1)^2=\ln(x+3)+\ln(4-x)$$

$$\ln(\mathrm{x}^2+2x+1)=\ln(x+3)(4-x)$$

$$x^2+2x+1=-x^2+x+12$$

$$2x^2+x-11=0$$

$$\Delta=1+88=89$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{89}}{4}\approx-2,6 \quad ; \qquad x_2=\frac{-1+\sqrt{89}}{4}\approx 2,1$$

À rejeter

$$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{89}}{4}\right\}$$

3) $\forall x \in]-1;+\infty[$:

$$h(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}-2x^3+x-\ln(x+1)\right)$$

$$h'(x)=\frac{1}{4}\left(x-6x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2+x-6x^3-6x^2+x+1-1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-6x^3-5x^2+2x}{x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x\cdot(-6x^2-5x+2)}{\underbrace{x+1}_{>0}}$$

$$\Delta=25+48=73$$

$$x_1=\frac{5-\sqrt{73}}{-12}\approx 0,3 \qquad ; \qquad x_2=\frac{5+\sqrt{73}}{-12}\approx-1,13$$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-6x^2-5x+2$		-	0	+	0	-	

x	-1		0		x_1		$+\infty$
x		-	0	+	:	+	
$-6x^2-5x+2$		+	:	+	0	-	
$h'(x)$	$\|\|$	-	0	+	0	-	
h	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Non, h n'est pas décroissante sur $]-1;+\infty[$,

car h est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{5-\sqrt{73}}{-12}\right[$.

Question VI ((2+1)+2 = 5 points)

1) **a)** F est une primitive de f ssi $F'=f$.

C_2 représente F et C_1 représente $F'=f$, car :

x		1	
$F'(x)=f(x)$	-	0	+
F	$\searrow$	min	$\nearrow$

b) $\int_0^2 f(x)dx = F(2)-F(0) = -2-(-3) = 1$

2) $\forall x \in]0;+\infty[\; : g(x) = ax\ln(x)+bx$

$$g'(x) = a\left[1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right]+b = a\left[1+\ln(x)\right]+b$$

$g(1)=1 \Leftrightarrow a\cdot 1\cdot 0+b\cdot 1=1 \Leftrightarrow \underline{b=1}$ (1)

$g'(1)=3 \Leftrightarrow a+b=3$ (2)

(1) dans (2) : $\underline{a=2}$

Théorie :	8 points
Optimisation :	7 points
Application :	35 points
Compréhension : IV. 1)	5 points
VI.	5 points
	10 points