Code branche	Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Division technique générale **Section technique générale - Session 2012/2013**	
MATHE		
Épreuve **écrite**	Branche	Division / Section
Durée épreuve **2h**	**Mathématiques II**	**GE**
Date épreuve 18.9.2013		

I. Démontrez :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z',

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \text{ et } \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

4 points

II. Considérez les nombres complexes :

$z_1 = \sqrt{3} - i$ $\qquad$ $z_2 = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\,cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $z_3 = 2ie^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Ecrivez z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b) Déterminez la forme algébrique et une forme exponentielle de $Z = \frac{{z_3}^2}{z_2}$.

c) Déduisez-en la valeur exacte de $sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et de $cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

6+5+2 = 13 points

III. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminez, pour chaque cas, l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient les conditions suivantes :

a) $|\bar{z} - 2 + 3i| < 4$

b) $arg(3i - iz) = \frac{\pi}{4}$

3+4 = 7 points

IV. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminez, par une méthode analytique, l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient la condition suivante :

$$|z - 2i| = |z + 3i - 5|$$

4 points

V. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le système :

$$(S)\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 & P_1 \\ -x + 2y + z - 3 = 0 & P_2 \\ -x + 3y - 4z + 3 = 0 & P_3 \end{cases}$$

a) Sans déterminer la droite d'intersection, démontrez que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b) Déterminez une représentation paramétrique de la droite d'intersection *d* de P_1 et P_2.

c) Montrez que *d* est contenue dans le plan P_3.

d) Déduisez-en l'ensemble des solutions de (S).

e) Remplacez le plan P_3 par un plan Q de telle manière que (S) n'admette aucune solution. Justifiez.

2+3+4+1,5+2,5 = 13 points

VI. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérez le point A(3 ; 2 ; -4) et le plan P : 2x – 4y + z = -2.

a) Montrez que A n'appartient pas à P.
b) Calculez la distance du point A au plan P.
c) Déterminez une équation de la sphère S de centre A et tangente au plan P.
d) Montrez que le point $B\left(\frac{55}{21}; \frac{58}{21}; -\frac{88}{21}\right)$ appartient à S. Déterminez une équation du plan Q tangent à S au point B.
e) Quelle est la position relative de P et Q ?

1+5+2+4+1=13 points

VII. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérez les points A(-2 ; 5 ; 3), B(1; 3; 0) et C(0; 2; 6).

a) Déterminez la nature du triangle ABC.
b) Calculez l'amplitude des angles du triangle ABC.

2+4=6 points

Le Commissaire du Gouvernement,

Corrigé Mathématiques II, 2012-13 GE Septembre

I. voir théorème 3 page 324

4

II. a)

$z_1 = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pm\frac{\pi}{6}$ rad mod(2π)

6 $z_1 \in 4^e quadrant \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ mod(2π)

Donc $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) forme trigonométrique : $Z = \dfrac{\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\frac{23\pi}{12}} = 4e^{-i\frac{\pi}{12}}$

5 forme algébrique : $Z = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

c) $4e^{-i\frac{\pi}{12}} = 4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

2 Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

III. a) $|\bar{z} - 2 + 3i| < 4$

$\Leftrightarrow |z - 2 - 3i| < 4$

3 $\Leftrightarrow$ M(z) se trouve à l'intérieur du cercle de centre A(2+3i) et de rayon 4, cercle exclu.

b) $\arg(-i \cdot (z-3)) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \arg(-i) + \arg(z-3) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \arg(z-3) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

4 $\Leftrightarrow$ M(z) ∈ demi-droite ouverte d'origine B(3) et de vecteur directeur $\vec{v}$ avec $(\vec{i}\,;\vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$

IV. $|z - 2i| = |z + 3i - 5|$

$\Leftrightarrow |x + iy - 2i| = |x + iy + 3i - 5|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9$

$\Leftrightarrow 10x - 10y - 30 = 0$

4 $\Leftrightarrow x - y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ M(z) appartient à une droite d'équation x – y – 3 = 0

V. a) $\overrightarrow{n_1}(2;\,-5;\,3)$ et $\overrightarrow{n_2}(-1;\,2;\,1)$ sont des vecteurs normaux de P_1, resp. P_2.

2 $\frac{2}{-1} \neq \frac{-5}{2} \Longrightarrow \nexists k \in \mathbb{R}\ t.q.\ \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$.

Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et P_1 et P_2 sont sécants.

b) (2) : x = 2y + z – 3 (4)
Dans (1) : 4y + 2z – 6 – 5y + 3z = 0 $\Leftrightarrow$ y = 5z – 6
Dans (4) : x = 10z – 12 + z – 3 = 11z – 15

3 Donc d $\begin{cases} x = 11t - 15 \\ y = 5t - 6 \\ z = t \end{cases}$, t réel

c) A(-15; -6; 0) $\in$ d. A $\in$ P_3 ?
15 – 18 + 3 = 0 $\Rightarrow$ A $\in$ P_3
$\overrightarrow{v_d}(11; 5; 1)$ est un vecteur directeur de d et $\overrightarrow{n_3}(-1;\ 3; -4)$ un vecteur normal de P_3,
4 $\overrightarrow{v_d} \cdot \overrightarrow{n_3}$ = -11 + 15 – 4 = 0 $\Rightarrow$ d $\parallel$ P_3.
Donc d est inclus dans P_3.

1,5 d) La droite d représente l'ensemble des solutions de (S).

e) Q : -x + 3y – 4z + 2 = 0 est strictement parallèle à P_3. Donc d et Q sont disjoints et (S) n'admet
2,5 alors aucune solution

VI. a) 2·3 – 4·2 – 4 = -6 ≠ -2. Donc A $\notin$ P.
1

b) Considérons la droite d $\perp$ P et passant par A. d $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -4 + t \end{cases}$, t réel

Soit A' le point d'intersection entre d et P.
6 + 4t – 8 + 16t – 4 + t = -2 $\Leftrightarrow$ 21t = 4 $\Leftrightarrow$ t = $\frac{4}{21}$.
Donc A'$\left(\frac{71}{21}; \frac{26}{21}; -\frac{80}{21}\right)$.
5 $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{8}{21}; -\frac{16}{21}; \frac{4}{21}\right)$ et AA' = $\sqrt{\frac{64+256+16}{21 \cdot 21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$.

2 c) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = \frac{16}{21}$

d) $(\frac{55}{21} - 3)^2 + (\frac{58}{21} - 2)^2 + (-\frac{88}{21} + 4)^2 = (-\frac{8}{21})^2 + (\frac{16}{21})^2 + (-\frac{4}{21})^2 = \frac{64}{441} + \frac{256}{441} + \frac{16}{441} = \frac{336}{441} = \frac{16}{21}$
$\Rightarrow$ B $\in$ S
$\overrightarrow{AB}(-\frac{8}{21}; \frac{16}{21}; -\frac{4}{21})$ et $\overrightarrow{n_Q}$ (-2 ; 4 ; -1) est un vecteur normal de Q.
4 Donc Q : -2x + 4y – z + d = 0
B $\in$ Q : -2·$\frac{55}{21}$ + 4·$\frac{58}{21}$ + $\frac{88}{21}$ + d = 0 $\Rightarrow$ d = -10
Donc Q : -2x + 4y – z – 10 = 0

1 e) Q est parallèle à P,car $\overrightarrow{n_Q}$ (-2 ; 4 ; -1) = -$\overrightarrow{n_P}$ (2 ; -4 ; 1)

VII. a) $\overrightarrow{AB}(3; -2; -3)$, $\overrightarrow{BC}(-1; -1; 6)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -3; 3)$
2 AB = $\sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$ BC = $\sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}$ AC = $\sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$
Le triangle ABC est isocèle.

b) $\widehat{BAC} = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}\right) = cos^{-1}\left(\frac{6+6-9}{22}\right) = cos^{-1}\left(\frac{3}{22}\right) \approx 82{,}16°$.
4 $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} \approx (180° - 82{,}16°) : 2 = 48{,}92°$.

2/2