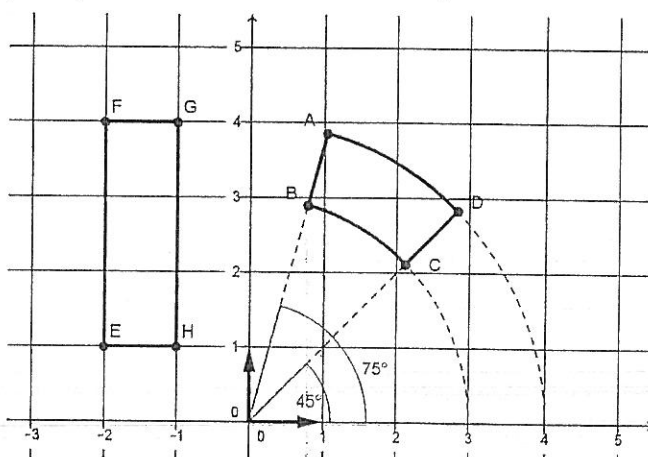


Code branche <b>MATHE II</b>	Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Division technique générale Section technique générale - Session 2012/2013	
Épreuve Ecrite	Branche	Division / Section
Durée épreuve 2h00	Mathématiques 2	GE
Date épreuve 15.10.2013		

**Question 1** (3+4+2=9 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les complexes  $z_1 = \sqrt{5}e^{-i\frac{7\pi}{6}}$  et  $z_2 = \sqrt{5} + \sqrt{15}i$ .

- Exprimer  $z_1$  sous forme algébrique. Est-ce que  $M_1(z_1)$  est à l'intérieur du rectangle EFGH ?
- Exprimer  $z_2$  sous forme trigonométrique. Est-ce que  $M_2(z_2)$  est à l'intérieur de la partie de la couronne ABCD ?
- Prouver que  $\frac{z_2}{z_1}$  est imaginaire pur.



**Question 2** (4+2+3+3+5=17 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- Démontrer :

Si A, B, C et D sont des points d'affixes  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$  tels que  $z_A \neq z_B$  et  $z_C \neq z_D$ , alors

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in (\overline{AB}, \overline{CD})$$

Soient K, L et M les points d'affixes  $z_K = 3i$ ,  $z_L = 2 + \frac{7i}{2}$  et  $z_M = 1 - i$ .

- Placer les points K, L et M dans le repère (prendre 1cm comme unité).
- Calculer l'affixe du point N tel que KLMN soit un parallélogramme.
- Calculer l'affixe de I, point d'intersection des diagonales de KLMN.
- Calculer une mesure de l'angle  $(\overline{KL}, \overline{KM})$ .



**Question 3** (3+4=7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z \neq -i$ , on pose  $Z = \frac{z-i}{z+i}$ ,  $z = x+iy$  et  $Z = X+iY$  avec  $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$ .

- Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
- Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $\operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Im}(Z)$ .

---

**Question 4** (4+1+5=10 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $A\left(3; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et  $B\left(1; \frac{3}{2}; \frac{-5}{2}\right)$  deux points de l'espace.

- Déterminer une équation de  $\mathcal{P}$ , plan médiateur de  $[AB]$ .
- Montrer que l'origine est un point de  $\mathcal{P}$ .
- Calculer  $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$  et en déduire une mesure (à 0,01 degrés près) de l'angle géométrique  $\widehat{AOB}$ .

---

**Question 5** (2+4+3+4=13 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le système  $(S)$  formé par les équations des trois plans donnés :  $(S) \begin{cases} P_1: x + y - z + 4 = 0 \\ P_2: 2y + z - 1 = 0 \\ P_3: 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$

- Sans déterminer la droite d'intersection  $\Delta$ , démontrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants.
- Montrer qu'une représentation paramétrique de  $\Delta$  est  $\begin{cases} x = -3t - 3 \\ y = t \\ z = -2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .
- Montrer que  $\Delta$  n'est pas parallèle à  $P_3$ .
- Résoudre  $(S)$ .

---

**Question 6** (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées :

$A(3; -2; 4)$  et  $B(-1; 0; 3)$ .

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre  $A$  et passant par  $B$ .



**Question 1** (3+4+2=9 points)

On considère les nombres complexes  $z_1 = \sqrt{5}e^{-i\frac{7\pi}{6}}$  et  $z_2 = \sqrt{5} + \sqrt{15}i$ .

3 pts.

$$a) \quad z_1 = -\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{15} + i\sqrt{5}}{2} = -1,93 + i1,12$$

donc  $M_1(z_1) \in EFGH$ .

4 pts.

$$b) \quad |z_2| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5} \quad z_2 = 2\sqrt{5} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}} = 4,47e^{i\frac{\pi}{3}}$$

donc  $M_2(z_2) \notin ABCD$ 

2 pts.

$$c) \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{5}e^{-i\frac{7\pi}{6}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$

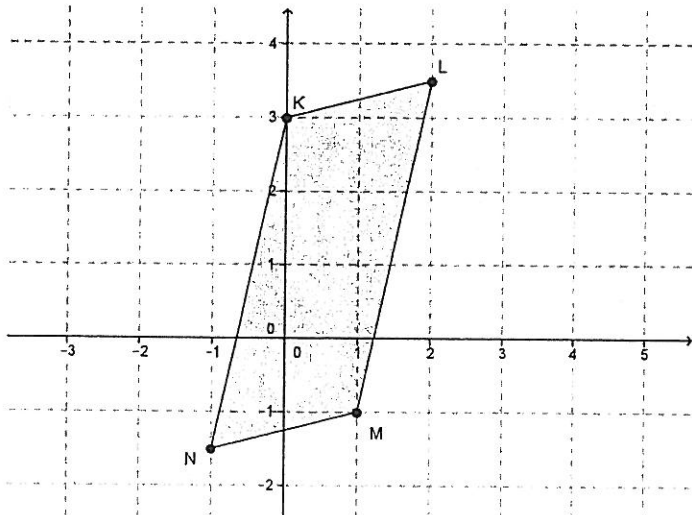
**Question 2** (4+2+2+3+5=16 points)

4 pts.

a) Voir cours.

2 pts.

b)



2 pts.

c)  $KLMN$  est un parallélogramme  $\Leftrightarrow z_{KL} = z_{NM} \Leftrightarrow z_L - z_K = z_M - z_N \Leftrightarrow z_N = z_K - z_L + z_M$

$$\text{Donc } z_N = 3i - 2 - \frac{7i}{2} + 1 - i = -1 - \frac{3}{2}i$$

3 pts.

d)  $I$  est le point d'intersection des diagonales de  $KLMN$ 

$$\Leftrightarrow I = \text{mil}[KM] \Rightarrow z_I = \frac{z_K + z_M}{2} = \frac{3i + 1 - i}{2} = \frac{1}{2} + i$$

1 pts.

e)

$$\left( \overline{KL}; \overline{KM} \right) = \arg \frac{z_M - z_K}{z_L - z_K} = \arg \frac{1 - i - 3i}{2 + \frac{7}{2}i - 3i}$$

2 pts.

$$= \arg \frac{1 - 4i}{2 + \frac{1}{2}i} = \arg \frac{(1 - 4i)(2 - \frac{1}{2}i)}{2^2 + (\frac{1}{2})^2} = \arg \frac{2 - \frac{1}{2}i - 8i - 2}{4 + \frac{1}{4}} = \arg \frac{-\frac{17}{2}i}{\frac{17}{4}}$$

2 pts.

$$= \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$$



**Question 3 (3+4=7 points)**

a) Soit  $z = x + iy$ , avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

2 pts.

$$Z = \frac{x + iy - i}{x + iy + i} = \frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)} = \frac{[x + i(y-1)][x - i(y+1)]}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{(x^2 + y^2 - 1) + i(\cancel{xy} - x + \cancel{xy} - x)}{D}$$

1 pts.

$$Z = \underbrace{\frac{x^2 + y^2 - 1}{D}}_{\text{Re}(Z)} + i \cdot \underbrace{\frac{-2x}{D}}_{\text{Im}(Z)}$$

2 pts.

b)  $\text{Re}(Z) = \text{Im}(Z) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = -2x$   
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2$   
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+0)^2 = (\sqrt{2})^2$

2 pts.

Donc  $\text{Re}(Z) = \text{Im}(Z) \Leftrightarrow M_1(z_1) \in C(\Omega(-1;0), \sqrt{2})$ ,  $z_1 \neq -i$

**Question 4 (4+1+6=11 points)**

1 pts.

a) Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ , alors  $I \left( \frac{3+1}{2}; \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2}; \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{2} \right) \Rightarrow I(2; 1; -1)$

1 pts.

$\overline{AB} \left( 1 - 3; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}; \frac{-5}{2} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \overline{AB}(-2; 1; -3)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 0$   
 $\Leftrightarrow (x-2) \cdot (-2) + (y-1) \cdot 1 + (z+1) \cdot (-3) = 0$   
 $\Leftrightarrow -2x + y - 3z + 4 - 1 - 3 = 0$   
 $\Leftrightarrow -2x + y - 3z = 0$

2 pts.

1 pts.

b)  $O \in \mathcal{P}$  car  $-2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0 = 0$ .

c)  $\|\overline{OA}\| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{38}{4}}$

2 pts.

$\|\overline{OB}\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{38}{4}}$

3 pts.

$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \|\overline{OA}\| \cdot \|\overline{OB}\| \cdot \cos(\widehat{AOB}) \Rightarrow \cos(\widehat{AOB}) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{\|\overline{OA}\| \cdot \|\overline{OB}\|} = \frac{3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{2}}{\frac{38}{4} \cdot \frac{38}{4}} = \frac{\frac{12}{4} + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}}{\frac{38}{4}} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{38}{4}} = \frac{5}{19}$

1 pts.

$\widehat{AOB} = 74, 74^\circ$



**Question 5** (2+5+3+3=13 points)

a)  $\vec{n}_1(1;1;-1)$  et  $\vec{n}_2(0;2;1)$  sont des vecteurs normaux aux plans  $P_1$  respectivement  $P_2$ .

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc  $\vec{n}_1(1;1;-1)$  et  $\vec{n}_2(0;2;1)$  ne sont pas colinéaires.

2 pts.

Ainsi  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants selon une droite.

b) 
$$\begin{cases} x+y-z+4=0 & L_1 \\ 2y+z-1=0 & L_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow L_2 : z = -2y + 1$$

2 pts.

$$\Rightarrow L_2 \text{ dans } L_1 : x = -y - 2y + 1 - 4 = -3y - 3$$

1 pts.

On pose  $y = t$ , où  $t \in \mathbb{R}$

2 pts.

$$\text{D'où } \Delta : \begin{cases} x = -3t - 3 \\ y = t \\ z = -2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1 pts.

c)  $\vec{u}(-3;1;-2)$  est un vecteur directeur de  $\Delta$  et  $\vec{n}_3(2;-2;1)$  est un vecteur normal à  $P_3$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_3 = -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -10 \neq 0 \quad \text{donc } \vec{u} \text{ et } \vec{n}_3 \text{ ne sont pas orthogonaux.}$$

2 pts.

Ainsi  $\Delta$  n'est pas parallèle à  $P_3$ .

d) Par c) nous savons que  $\Delta$  coupe  $P_3$  en un unique point  $M(x;y;z)$  tel que :

2 pts.

$$\begin{cases} x = -3t - 3 \\ y = t \\ z = -2t + 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3t - 3 \\ y = t \\ z = -2t + 1 \\ 2(-3t - 3) - 2t + (-2t + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3t - 3 \\ y = t \\ z = -2t + 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

1 pts.

D'où  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$  l'unique solution du système (S).

**Question 6** (4 points)

1 pts.

$$\vec{AB}(-1-3; 0-(-2); 3-4) \Rightarrow \vec{AB}(-4; 2; -1)$$

1 pts.

$$r = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

2 pts.

$$M(x;y;z) \in S(A,r) \Leftrightarrow \|\vec{AM}\|^2 = \sqrt{21}^2$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 21$$

