Code branche	Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Division technique générale **Section technique générale - Session 2012/2013**	
MATHE I		
Épreuve **écrite**	Branche	Division / Section
Durée épreuve **3h**	**Mathématiques I**	**GE GI**
Date épreuve 14.10.2013		

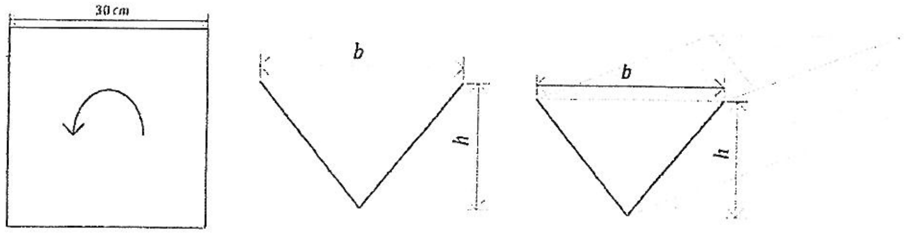
Question I *(6+2=8 points)*

Démontrer que: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Question II *(0,5+4+3,5=8 points)*

Une gouttière « en forme de V » est formée à partir d'une plaque métallique rectangulaire de 30 cm de largeur, en pliant celle-ci comme l'indique la figure ci-dessous.

On cherche à déterminer la largeur b en cm et la hauteur h en cm de la gouttière pour que l'aire de la coupe transversale de la gouttière soit maximale.



1) a) Donner sans justification les valeurs possibles pour b.

   b) Démontrer que l'aire de la coupe transversale en cm^2 peut s'écrire sous la forme

$$A(b) = \frac{b}{4}\sqrt{900 - b^2}$$

2) Déterminer la largeur b et la hauteur h de la gouttière pour que l'aire de la coupe transversale soit maximale.

Question III *(3+3+3=9 points)*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a) $\ln(x+3) > \ln(x^2 + 2x - 3) - \ln x$

   b) $e^{4x} - e^{2x} \leq 6$

2) Démontrer que l'équation $e^{-x} = -1 - x$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Question IV (*1+2+2+2+3+2=12 points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(e^{2x}+2e^{-x})$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=2x+\ln(1+2e^{-3x})$ et en déduire l'existence d'une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ notée d et en donner une équation.
3) Etudier la position de C_f par rapport à d.
4) Trouver une écriture de f qui permet de démontrer que C_f admet une asymptote oblique en $-\infty$. Démontrer l'existence d'une telle asymptote notée d' et en donner une équation.
5) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
6) Tracer d, d' et C_f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique: 2cm), ainsi que la tangente à C_f au point d'abscisse x = 0.

Question V (*2+2+1=5 points*)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

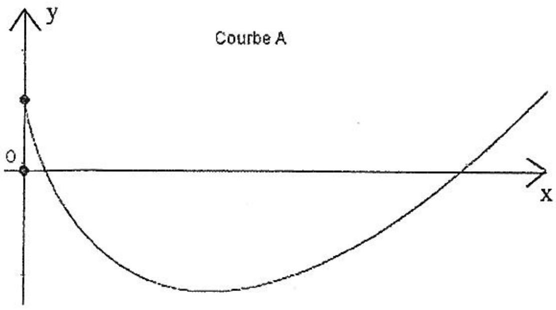
1) Donner l'équation de la tangente à C_f au point M(a ; f(a)).
2) Existe-t-il un point M(a ; f(a)) tel que la tangente à C_f en M passe par l'origine? Justifier.
3) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier.

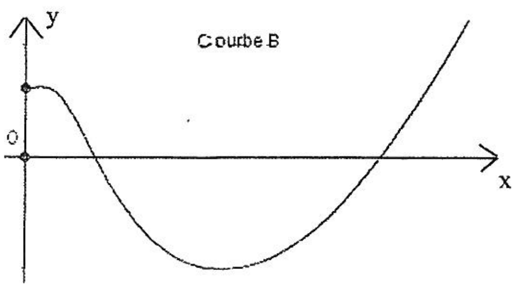
   « C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ».

Question VI (*2+2=4 points*)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=x\ln x-2x+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0.
2) Une des courbes ci-dessous représente la fonction f. Laquelle? Justifier.





Question VII *(0,5+2+0,5+3=6 points)*

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $\dfrac{1}{\left(e^x+1\right)^2} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

b) Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \int_0^1 \dfrac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$

2) a) Donner une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^1 \dfrac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^3}\,dx$.

Question VIII *(4 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 2$, avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Question IX *(4 points)*

Calcule l'intégrale suivante : $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin\left(\ln x\right) dx$

Corrigé – Mathématiques I – Session 2013 14. 10. 2013

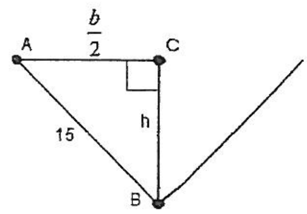
Question I

Voir livre p. 90

Question II

1) a) $b \in]0;30[$

b) Le triangle ABC est rectangle en C



donc par le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Leftrightarrow 15^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 225 - \frac{b^2}{4} = h^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{900 - b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{900 - b^2}}{2} \quad \text{car } h > 0$$

Ainsi, $A(b) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{900 - b^2}}{2} = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{900 - b^2}$, pour tout $b \in]0;30[$

2) Soit A la fonction définie sur $]0;30[$ par $A(b) = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{900 - b^2}$.

Pour tout $b \in]0;30[$,

$$A'(b) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{900 - b^2} - \left.\frac{b^2}{4\sqrt{900 - b^2}}\right\} > 0 \ \forall b \in]0;30[$$

$$= \frac{900 - 2b^2}{4\sqrt{900 - b^2}}$$

Le signe de A' dépend du signe de $900 - 2b^2$.

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{900 - 2b^2}{4\sqrt{900 - b^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 450$$

$$\Leftrightarrow b = 15\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad b = -15\sqrt{2} \ \text{(à écarter)}$$

Tableau de variation

b	0		$15\sqrt{2}$		30
$A'(b)$	‖	+	0	-	‖
$A(b)$	‖	↗	max	↘	‖

L'aire de la coupe transversale est maximale lorsque $b = 15\sqrt{2}$ cm et $h = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm .

Question III

1) **a)** Conditions d'existence :

$$x+3>0 \quad \text{et} \quad x^2+2x-3>0 \quad \text{et} \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow x>-3 \quad \text{et} \quad x\in \left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[0 \quad \text{et} \quad x>0$$

$$D=\left]1;+\infty\right[$$

$$\forall x\in\left]1;+\infty\right[, \ln(x+3)>\ln(x^2+2x-3)-\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+3)+\ln x>\ln(x^2+2x-3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+3x)>\ln(x^2+2x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x>x^2+2x-3$$

$$\Leftrightarrow x>-3$$

$$S=\left]1;+\infty\right[$$

b) $e^{4x}-e^{2x}\leq 6$

Posons $t=e^{2x}$. On obtient alors,

$$t^2-t\leq 6$$

$$\Leftrightarrow t^2-t-6\leq 0 \qquad (\Delta=25,\ t_1=-2,\ t_2=3)$$

$$\Leftrightarrow t\in[-2;3]$$

Ainsi, il faut que

$e^{2x}\geq -2$	et	$e^{2x}\leq 3$
toujours vrai		$\Leftrightarrow 2x\leq ln3$
		$\Leftrightarrow x\leq \dfrac{ln3}{2}$

$$S=\left]-\infty;\frac{ln3}{2}\right]$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}=-1-x \Leftrightarrow e^{-x}+x+1=0$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+x+1$.

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1+xe^{x}+e^{x}\right)=+\infty \end{pmatrix}$$ (pas nécessaire)

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x)=-e^{-x}+1$$

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x}+1\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq \ln 1 \Leftrightarrow x\geq 0$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2 min	$\nearrow$	

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 2$,

$f(x)=0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Donc l'équation $e^{-x}=-1-x$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Question IV

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\underbrace{\overbrace{e^{2x}}^{\to+\infty}+\overbrace{2e^{-x}}^{\to 0}}_{\to+\infty}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\underbrace{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}+\overbrace{2e^{-x}}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}) = +\infty$

2) Pour tout reel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^{2x}+2e^{-x}) \\ &= \ln\left[e^{2x}\left(1+2e^{-3x}\right)\right] \\ &= \ln\left(e^{2x}\right)+\ln(1+2e^{-3x}) \\ &= 2x+\ln(1+2e^{-3x}) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\underbrace{1+\overbrace{2e^{-3x}}^{\to 0}}_{\to 1}) = 0$ donc C_f admet une A.O. d'éq. y = 2x en $+\infty$.

3) $f(x)-2x = \ln(1+2e^{-3x})$

$\ln(1+2e^{-3x}) > 0 \Leftrightarrow 1+2e^{-3x} > 1 \Leftrightarrow e^{-3x} > 0$ toujours vrai

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, C_f est au-dessus de d.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(e^{2x}+2e^{-x}) = \ln\left[2e^{-x}\left(\dfrac{e^{3x}}{2}+1\right)\right] = \ln 2 - x + \ln\left(\dfrac{e^{3x}}{2}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\ln 2 - x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\underbrace{\dfrac{\overbrace{e^{3x}}^{\to 0}}{2}+1}_{\to 1}\right) = 0$

donc C_f admet une A.O. d'éq. $y = \ln 2 - x$ en $-\infty$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}-2e^{-x}}{e^{2x}+2e^{-x}} = \frac{2\left(e^{2x}-e^{-x}\right)}{\underbrace{e^{2x}+2e^{-x}}_{>0\ \forall x\in\mathbb{R}}}$$

Le signe de f' dépend du signe de $e^{2x}-e^{-x}$. Or, $e^{2x}-e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq e^{-x} \Leftrightarrow 2x \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 3 \cong 1,1$	↗	$+\infty$

6)

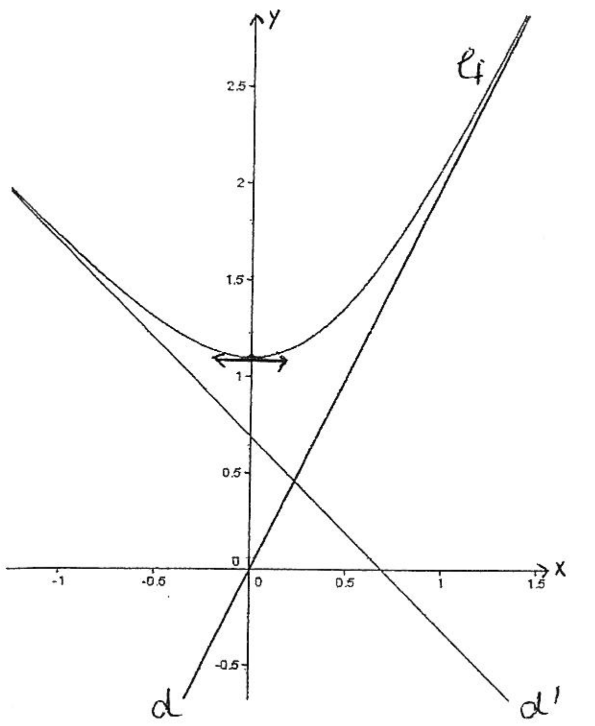


Tableau de valeurs

x	0,5	1	-0,5
$f(x)$	$\cong 1,4$	$\cong 2,1$	$\cong 1,3$

Question V

1) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$$y = \frac{-\ln a}{a^2}(x-a)+\frac{1+\ln a}{a}$$

2) $O(0;0) \in T_a \Leftrightarrow \ 0 = \dfrac{-\ln a}{a^2}(0-a)+\dfrac{1+\ln a}{a}$

$\Leftrightarrow \ 0 = \dfrac{\ln a}{a}+\dfrac{1+\ln a}{a}$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{2\ln a+1}{a}$

$\Leftrightarrow \ln a = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Oui, il existe un point M(a ; f(a)) tel que la tangente à C_f en M passe par l'origine. C'est le point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{1+\ln x}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\overbrace{\dfrac{1}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\dfrac{\ln x}{x}}^{\to 0}\right) = 0$

Donc C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Donc l'affirmation est vraie.

Question VI

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x-2x+1-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x-2x}{x}$ F.I.

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(\ln x-2)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x-2)$

$= -\infty$ Donc f n'est pas dérivable en 0.

2) Comme f n'est pas dérivable en 0, C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x = 0, donc la courbe A est la courbe qui représente la fonction f.

Question VII

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $1-\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1-\left(e^{2x}+e^x\right)-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{1}{\left(e^x+1\right)^2}$.

b)

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)dx$$

$$=\left[x-\ln\left|e^x+1\right|+\frac{1}{e^x+1}\right]_0^1$$

$$=1-\ln(e+1)+\frac{1}{e+1}-\left(0-\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\ln(e+1)+\frac{1}{e+1}+\ln 2$$

2) a) $F(x)=-\dfrac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}$.

b) $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^3}\,dx$.

Posons : $u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$

$v'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$ $\qquad v(x)=-\dfrac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}$

$$J=\left[-\frac{x}{2(e^x+1)^2}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2(e+1)^2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2(e+1)^2}+\frac{1}{2}I$$

$$=-\frac{1}{2(e+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\ln(e+1)+\frac{1}{e+1}+\ln 2\right)$$

$$=-\frac{1}{2(e+1)^2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln(e+1)+\frac{1}{2(e+1)}+\frac{1}{2}\ln 2$$

Question VIII

Etudions d'abord le signe de $f(x)=x^3-2x^2-x+2$

$f(1)=0$ et par le schéma de Horner on trouve: $f(x)=(x-1)(x^2-x-2)$.

$x^2-x-2=0$ ssi $x=-1$ ou $x=2$ $(\Delta=9)$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+		+	
x^2-x-2		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Ainsi, $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[0;1]$ et $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[1;2]$.

$$A=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}\quad \text{u.a.}$$

Question IX (compréhension)

$$I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin\left(\ln x\right)dx=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}1\cdot\sin\left(\ln x\right)dx$$

Posons : $u(x)=\sin(\ln x)$ $u'(x)=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

$v'(x)=1$ $v(x)=x$

$$=\left[x\cdot\sin(\ln x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}-\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos\left(\ln x\right)dx$$

Posons : $u(x)=\cos(\ln x)$ $u'(x)=\dfrac{-\sin(\ln x)}{x}$

$v'(x)=1$ $v(x)=x$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left[x\cdot\cos(\ln x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}+\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}-\sin\left(\ln x\right)dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I$$

Donc,

$$2I=e^{\frac{\pi}{2}}+1$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$$