MATHE II	Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Division technique générale **Section technique générale - Session 2012/2013**	
Épreuve **écrite**	*Branche*	*Division / Section*
Durée épreuve **2 h**	**Mathématiques II**	**GE**
Date épreuve 10.6.2013		

I. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Démontrer le théorème suivant :
Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D telles que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

[4 points]

II. Soit les nombres complexes suivants $z_1 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$.

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Donner une forme exponentielle de $Z = \frac{(z_1)^4}{z_2}$.
3. En déduire la forme algébrique de $\left(\overline{Z}\right)^3$.

[4+3+2=9 points]

III. Pour tout complexe z, on considère $P(z) = z^3 - (2+5i)z^2 + 5(1+2i)z - 25i$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b, tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2 + az + b)(z - 5i)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

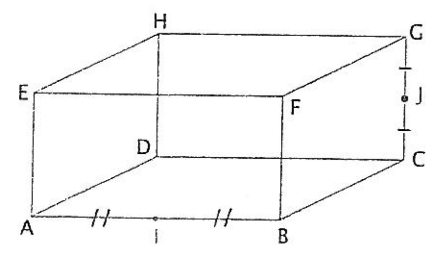
[3+3=6 points]

IV. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

1. $|5 - iz| = |\overline{z} - 2 + i|$
2. $arg(3 - i - z) = \frac{5\pi}{3}$

[4+3=7 points]

V.



$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que :
$AB = 2a$ et $BC = GC = a$.
I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CG]$.

1. Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD}$.
2. Déterminer à 0,1° près la mesure de l'angle géométrique
géométrique $\widehat{DJH}$.

[(1+2+4)+4=11 points]

VI. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(-2;3;-5)$, $B(2;0;3)$, $C(3;6;5)$, $D(-1;2;-3)$ et $E(-5;2;-1)$.

1. Prouver que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).
3. Déterminer une équation du plan (ABC).
4. Déterminer le point d'intersection de la droite (DE) avec le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

[2+3+2+4=11 points]

VII. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x - y + 3z = -1 & P_1 \\ -3x + 2y + z = 4 & P_2 \\ 2x - y - 4z = -3 & P_3 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants sans déterminer leur intersection.
   b) On note d la droite d'intersection des deux plans. Préciser un point et un vecteur directeur de d.
2. Démontrer que d est contenue dans P_3.
3. Déduire l'ensemble des solutions de (S).

[(2+5)+3+2=12 points]

Le Commissaire du Gouvernement,

CORRIGÉ :

Repêchage 10. 6. 2013

MATHÉMATIQUES II

GE

Question 1

voir manuel page 350

QUESTION 2

1) $z_1 = -\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$z_2 = -\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

$= e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) $z = \dfrac{(z_1)^4}{z_2}$

$(z_1)^4 = (\sqrt{2}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = 4e^{-i\frac{8\pi}{3}}$

$= \dfrac{4e^{-i\frac{8\pi}{3}}}{e^{i\, 5\pi/6}}$

$= 4e^{-i\left(\frac{8\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)}$

$= 4e^{-i\frac{7\pi}{2}}$

$= 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

3) $(\overline{z})^3 = (4e^{-i\frac{\pi}{2}})^3 = 64\, e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i$

QUESTION 3

$P(z) = z^3 - (2+5i)z^2 + 5(1+2i)z - 25i$ ①

1) $P(z) = (z^2 + az + b)(z - 5i)$

$= z^3 + az^2 + bz - 5iz^2 - 5aiz - 5bi$

En comparant ① et ② :

$$\begin{cases} a-5i = -2-5i \\ b-5ai = 5+10i \\ -5bi = -25i \end{cases} \iff \begin{cases} -2-5i = -2-5i \quad \underline{\text{vrai}}. \\ a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

donc $a=-2$ et $b=5$.

Ainsi $P(z) = (z^2-2z+5)(z-5i)$

2) $P(z)=0 \iff z^2-2z+5=0$ ou $z-5i=0$

$$\Delta = 4-20 = -16$$

$$z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$z_2 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$P(z)=0 \iff z = 1+2i$ ou $z = 1-2i$ ou $z = 5i$

$S = \{1+2i ; 1-2i ; 5i\}$

<u>QUESTION 4</u>

1) $|5-iz| = |\bar{z}-2+i|$

$\iff |-i(5i+z)| = |\overline{z-2-i}|$

$\iff \underbrace{|-i|}_{=1} \cdot |5i+z| = |z-2-i|$

$\iff |z-(-5i)| = |z-(2+i)|$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB] avec $A(-5i)$ et $B(2+i)$

2) $\arg(3-i-z) = \frac{5\pi}{3}$

$\iff \arg[-(-3+i+z)] = \frac{5\pi}{3}$

$\iff \arg(z-3+i)+\pi = \frac{5\pi}{3}$

$\iff \arg(z-(3-i)) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$

L'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine $C(3-i)$ dirigée par un vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u};\vec{w}) = \frac{2\pi}{3}$.

QUESTION 5

$AB = 2a$ $\quad I = \text{mil } [AB]$ $\quad AI = BI = \frac{1}{2}AB = a$

$BC = GC = a$ $\quad J = \text{mil } [GC]$ $\quad GJ = JC = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}a$

1) $\vec{AI} \cdot \vec{AE} = 0$, car le triangle EAI est rectangle en A.

$\vec{IE} \cdot \vec{IA} = \vec{IA} \cdot \vec{IA}$, car A est le projeté orthogonal de E sur (IA)

$= IA^2$

$= a^2$

$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = (\vec{JG} + \vec{GH}) \cdot (\vec{JC} + \vec{CD})$

$= \vec{JG} \cdot \vec{JC} + \vec{JG} \cdot \vec{CD} + \vec{GH} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD}$

$= -\vec{JG} \cdot \vec{JG} + 0 + 0 + \vec{GH} \cdot \vec{GH}$

$= -JG^2 + GH^2$

$= -\frac{1}{4}a^2 + 4a^2$

$= \frac{15}{4}a^2$

2) $\vec{JD} \cdot \vec{JH} = \|\vec{JD}\| \cdot \|\vec{JH}\| \cdot \cos\widehat{DJH}$

$\Leftrightarrow \vec{JH} \cdot \vec{JD} = JD \cdot JH \cdot \cos\widehat{DJH}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{DJH} = \dfrac{\vec{JH} \cdot \vec{JD}}{JD \cdot JH}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{DJH} = \dfrac{\frac{15}{4}a^2}{JD^2}$

Le triangle JCD est rectangle en C ; d'après Pythagore :

$JD^2 = JC^2 + CD^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4a^2 = \frac{17}{4}a^2$

d'où : $\cos\widehat{DJH} = \dfrac{\frac{15}{4}a^2}{\frac{17}{4}a^2} = \dfrac{15}{17}$

donc : $\widehat{DJH} \simeq 28{,}1°$.

ÉDUCATION NATIONALE ET FORMATION PROFESSIONNELLE G.D. DE LUXEMBOURG

QUESTION 6

$A(-2;3;-5)$ $B(2;0;3)$ $C(3;6;5)$ $D(-1;2;-3)$ $E(-5;2;-1)$

1) $\vec{AB}(4;-3;8)$ $\vec{AC}(5;3;10)$

Comme il n'existe aucun réel k tel que $\vec{AC} = k\cdot\vec{AB}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi A, B et C non alignés.

2) $\vec{DE}(-4;0;2)$

$\vec{DE}\cdot\vec{AB} = -4\cdot4 + 0\cdot(-3) + 2\cdot8 = -16+16 = 0 \Rightarrow \vec{DE}\perp\vec{AB}$

$\vec{DE}\cdot\vec{AC} = -4\cdot5 + 0\cdot3 + 2\cdot10 = -20+20 = 0 \Rightarrow \vec{DE}\perp\vec{AC}$

Comme $\vec{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), $\vec{DE}$ est normal à (ABC).

3) $M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\perp\vec{DE}$

$\Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{DE} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)\cdot(-4) + (y-3)\cdot0 + (z+5)\cdot2 = 0$

$\Leftrightarrow -4x + 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - z - 1 = 0$

4) Soit $\{K\} = (DE) \cap (O;\vec{i};\vec{j})$

Le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$ a pour équation $z=0$.

(DE) a pour vecteur directeur $\vec{DE}$ et passe par D

Représentation paramétrique de (DE) :

$$\begin{cases} x = -1-4t \\ y = 2 \\ z = -3+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Les coordonnées de K vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x = -1-4t \\ y = 2 \\ z = -3+2t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 2 \\ t = \frac{3}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$K(-7 ; 2 ; 0)$.

QUESTION 7

1. a) $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur normal $\vec{n_1}(1 ; -1 ; 3)$

$\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n_2}(-3 ; 2 ; 1)$

Comme il n'existe aucun réel k tel que $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$, $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires et ainsi $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b) $$\begin{cases} x - y + 3z = -1 & (1) \\ -3x + 2y + z = 4 & (2) \end{cases}$$

(1) : $x - y + 3z = -1 \Leftrightarrow x = y - 3z - 1$

En remplaçant x par $y-3z-1$ dans (2) :

$-3y + 9z + 3 + 2y + z = 4 \Leftrightarrow -y + 10z = 1 \Leftrightarrow y = 10z - 1$

(1) : $x = 10z - 1 - 3z - 1 = 7z - 2$

On a : $\begin{cases} x = 7z - 2 \\ y = 10z - 1 \end{cases}$

z peut prendre toute valeur de $\mathbb{R}$. On pose $z = t$.

Représentation paramétrique de d :

$$d : \begin{cases} x = 7t - 2 \\ y = 10t - 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$d = (A ; \vec{u})$ avec $A(-2 ; -1 ; 0)$ et $\vec{u}(7 ; 10 ; 1)$

2) Soit $M \in d$. Alors les coordonnées de M vérifient:

$$\begin{cases} x = 7t - 2 \\ y = 10t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$M \in \mathcal{P}_3 \Leftrightarrow 2 \cdot (7t-2) - (10t-1) - 4t = -3$

$\Leftrightarrow \cancel{14t} - 4 - \cancel{10t} + 1 \cancel{- 4t} = -3$

$\Leftrightarrow \quad -3 = -3$ vrai

donc $M \in \mathcal{P}_3$. Ainsi $d \subset \mathcal{P}_3$.

3) D'après 1) $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = d$

D'après 2) $d \subset \mathcal{P}_3$.

Donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = d$.

$S = \{ (7t-2 ; 10t-1 ; t), \ t \in \mathbb{R} \}$