| Code branche | Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle | |
| --- | --- | --- |
| **MATHE I** | EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES<br>Régime technique – Division technique générale<br>**Section technique générale - Session 2012/2013** | |
| *Épreuve*<br>**écrite** | *Branche* | *Division / Section* |
| *Durée épreuve*<br>**3h** | **Mathématiques I** | **GE GI** |
| *Date épreuve*<br>10 juin 2013 | | |

**Question I** (4+5 = 9 points)

a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

---

**Question II** ((2+3)+(3+2+2+3) = 15 points)

1) On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 \cdot \ln(x)$

a) Déterminer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de $g$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2) On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$.

$C_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal.

a) Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Montrer que la droite $(d)$ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $C_f$ et déterminer la position de $C_f$ par rapport à $(d)$ sur $]0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

d) Tracer la courbe $C_f$ et la droite $(d)$ (Unité : 2cm).

---

**Question III** (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$$

**Question IV** ((1+1+2)+(8+2) = 14 points)

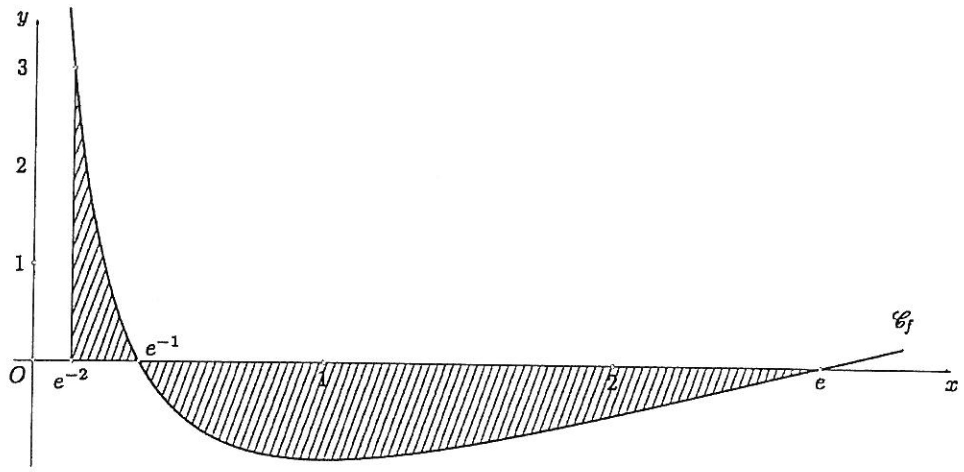
1) Calculer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_1^2 \frac{1}{1-2t}\,dt$$

$$b)\ \int_1^4 \frac{e^{3\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$c)\ \int_0^1 sin^3(\pi t)\,dt$$

2) Considérons la fonction $f$ *définie sur* $I = ]0;+\infty[$ par $f(x) = ln^2(x) - 1$. Elle est représentée par $\mathcal{C}_f$ dans le repère orthogonal ci-dessous.




Posons, pour tout $x \in I$ : $F(x) = \int_{e^{-1}}^{x} f(t)dt$

a) Montrer par une double intégration par parties que la fonction F est donnée par :

$$F(x) = x(\ln(x) - 1)^2 - \frac{4}{e}$$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en u.a., du domaine hachuré ci-dessus.

---

**Question V** (0,5+4,5+3 = 8 points)

Quel doit être le rayon d'une boîte de conserve cylindrique de volume $a$ fixé (donc $a$ est une constante strictement positive) pour économiser le plus de métal ?

On note : $\mathcal{A}$ l'aire totale de la boîte ; R le rayon de la base ; h la hauteur de la boîte.

On ne tient pas compte de l'épaisseur du métal et des soudures, la quantité de métal utilisée est proportionnelle à l'aire $\mathcal{A}$ de la boîte.

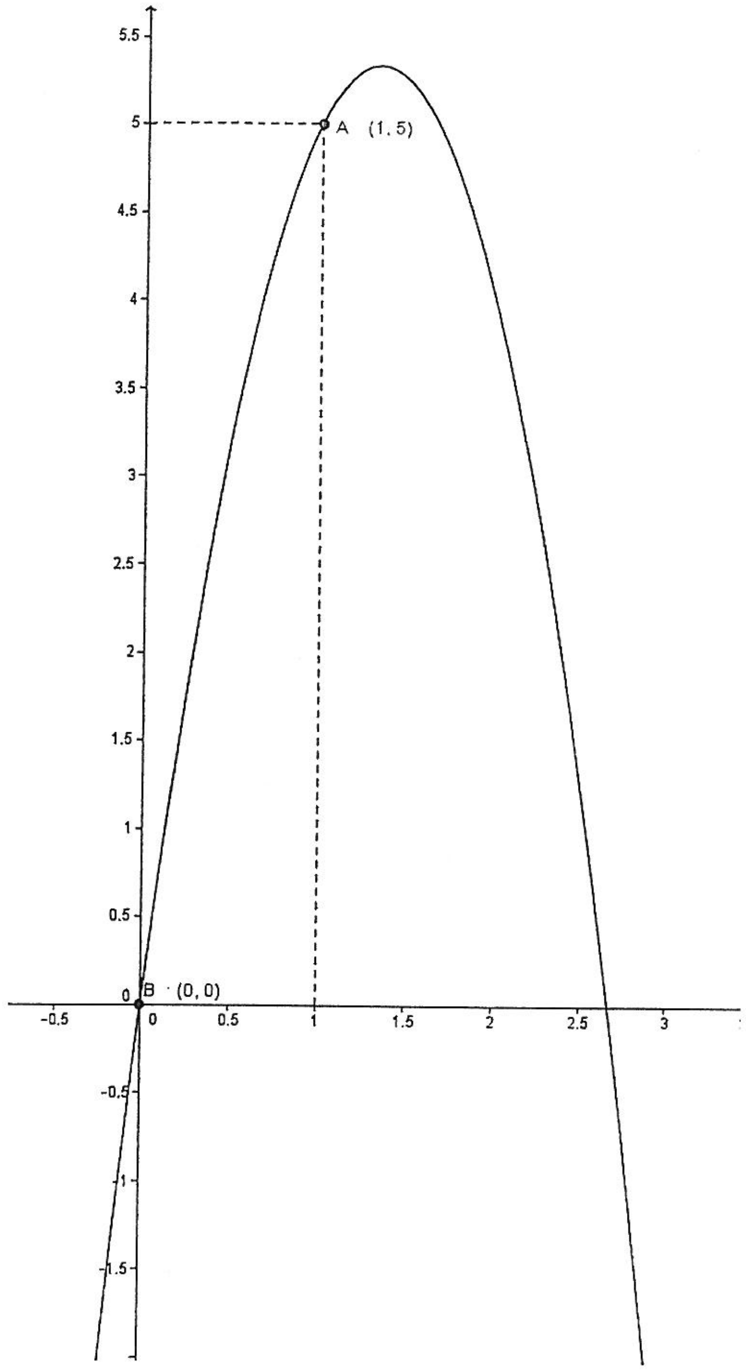
a) Quelles sont les valeurs possibles de R (sans justification)?

b) Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la boîte en fonction du rayon R est définie par $\mathcal{A}(R) = 2\pi R^2 + \frac{2a}{R}$

c) Quel doit être le rayon R (en fonction de $a$) pour économiser le plus de métal possible ?

Le Commissaire du Gouvernement,

**Question VI** (2,5+7,5 = 10 points)




Soit $f$ une fonction polynôme du troisième degré définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c, d \in \mathbb{R}$.

On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction dérivée de $f$.

a) Donner le tableau de variation de $f$.

b) On donne également les informations suivantes : $f(0) = 2$ et $f(1) = 5$.

Sachant que $f(0) = 2$ et $f(1) = 5$, déterminer l'expression de la fonction $f$ (c'est-à-dire chercher les valeurs de $a, b, c$ $et$ $d$ ).

**Corrigé** **(Nombre de pages: 7)** **Mathématiques I** GE - GI 10. 6. 2013

Question I (4+5 = 9 points) *théorie*

a) voir la démonstration du théorème 7 p:90 – Livre Transmath TermS
b) voir la démonstration du théorème 9 p:92 – Livre Transmath TermS

Question II ((2+3)+(3+2+2+3) = 15 points) *techniques de calcul*

**1)** $g(x) = x^2 - 2\cdot\ln x \qquad D_g = ]0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x^2}_{\to 0} - 2\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\right)$$

$$= +\infty$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2\underbrace{\ln x}_{\to +\infty}\right) \quad F.I.\text{"}\infty - \infty\text{"}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[\underbrace{x^2}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1 - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}\right] = +\infty$$

b) $\forall x \in ]0;+\infty[$

$$g'(x) = 2x - 2\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x^2-2}{x}$$

$$= \frac{2(x-1)\overbrace{(x+1)}^{>0}}{\underbrace{x}_{>0}}$$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | ‖ $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | ‖ $+\infty$ ↘ | Min $1$ | ↗ $+\infty$ |

$$g(1) = 1 - 2\ln 1$$
$$= 1$$

D'après le T.V. de g on a : $\forall x \in ]0;+\infty[: g(x) \geq 1 > 0$.

On en déduit donc que la fonction g est strictement positive sur $]0;+\infty[$ .

**2)** $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln(x)}{x} \quad ; \quad D_f = ]0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 0^+}}{2} + \underbrace{\frac{\overbrace{1+\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}}}_{\to -\infty}\right)$$

$$= -\infty$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\overbrace{x}^{\to +\infty}}{2} + \underbrace{\frac{1+\ln x}{x}}_{F.I.\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\overbrace{x}^{\to +\infty}}{2} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right] = +\infty$$

$C_f$ admet une A.V. d'équation x=0 et $C_f$ n'admet pas d'A.H. en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right]$$

$$=0$$

La droite (d) d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est A.O. à $C_f$ en $+\infty$.

<u>Position de $C_f$ par rapport à *(d)*:</u>

$\forall x\in D_f : f(x)-y=\dfrac{1+\ln x}{\underbrace{x}_{>0}}$

$\forall x\in D_f$ :

| | |
|---|---|
| $1+\ln x>0$ | $1+\ln x\le 0$ |
| $\Leftrightarrow \ln x>-1$ | $\Leftrightarrow \ln x\le -1$ |
| $\Leftrightarrow \quad x>e^{-1}$ | $\Leftrightarrow \quad x\le e^{-1}$ |

| $x$ | $0$ | $e^{-1}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| *f(x)-y* | - | 0 | + |
| Position de $C_f$ par rapport à *(d)* | $(d)/C_f$ | | $C_f/(d)$ |

$C_f$ et $(d)$ se coupent

c) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{-\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-2\ln x}{2x^2}$$

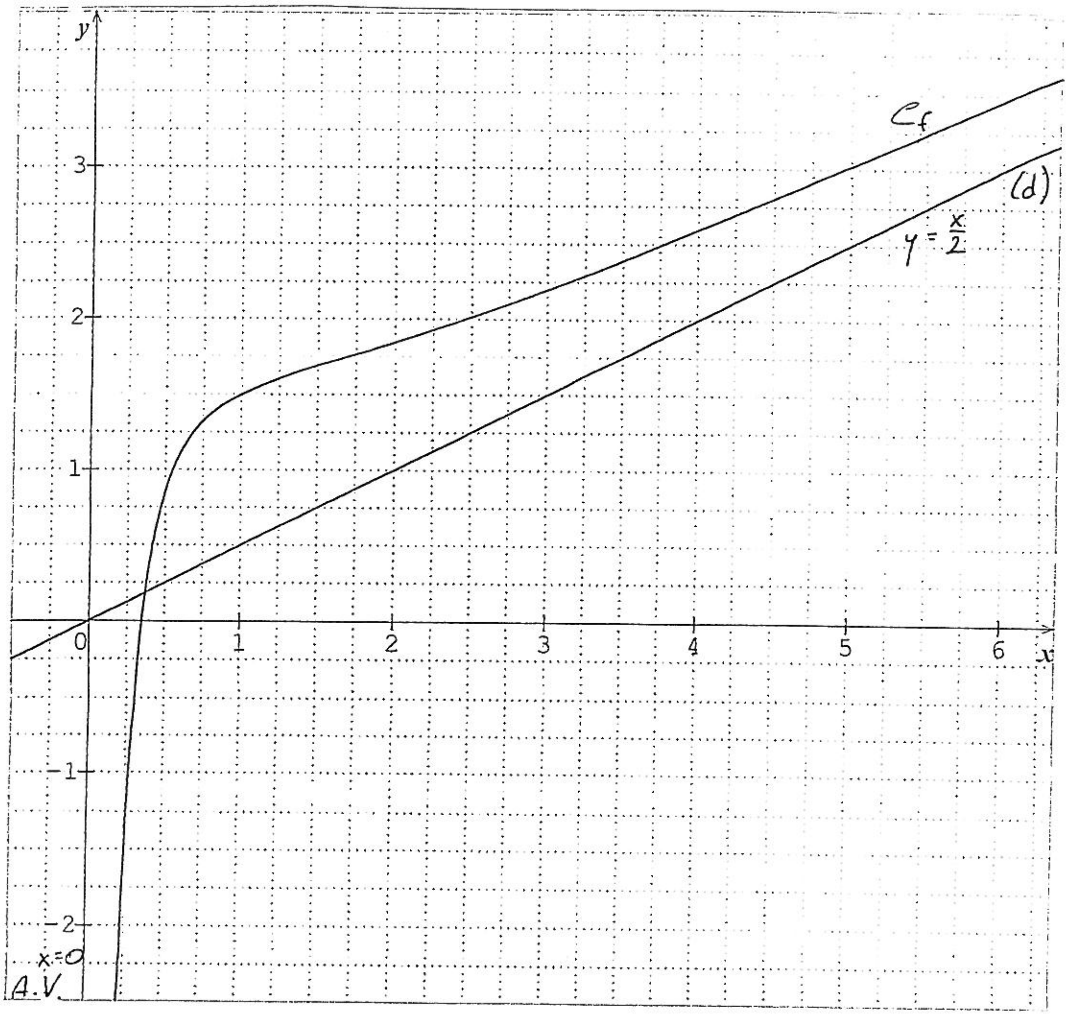
$$=\frac{\overbrace{g(x)}^{>0\text{ par le point 1b)}}}{\underbrace{2x^2}_{>0}}$$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $F'$ | + | |
| $f$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

d)

| $x$ | ¼ | ½ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1,4 | 0,9 | 1,5 | 1,7 | 1,8 | 2 | 2,2 | 2,6 | 2,8 | 3 |

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}\approx 0{,}18$




Question III (4 points) *techniques de calcul*

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln x+\ln 3)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right)=\ln(3x)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)^2=\ln(3x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{2}\right)^2=3x$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9=12x$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=3\in E$$

$$S=\{3\}$$

$C.E.:$

1) $\frac{x+3}{2}>0$

$\Leftrightarrow x>-3$

2) $x>0$

$E=\left]0;+\infty\right[$

Question IV ((1+1+2)+(8+2) = 14 points) *techniques de calcul*

(1) (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1-2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\Big[\ln|\underbrace{1-2t}_{<0}|\Big]_1^2 = -\frac{1}{2}\Big[\ln(2t-1)\Big]_1^2 = \boxed{-\frac{\ln 3}{2}}$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{3\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\Big[e^{3\sqrt{t}}\Big]_1^4 = \frac{2}{3}\left(e^6 - e^3\right) = \boxed{\frac{2}{3}\,e^3\left(e^3-1\right)}$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin^3(\pi t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\Big(1-\cos^2(\pi t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big(\sin(\pi t) - \sin(\pi t)\cdot\cos^2(\pi t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) + \frac{1}{3\pi}\cos^3(\pi t)\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} \\
&= \boxed{\frac{4}{3\pi}}
\end{aligned}$$

(2) (a) Par définition :

$$F(x) = \int_{e^{-1}}^{x} \Big(\ln^2(t) - 1\Big)\,\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties :

$$\left|\begin{array}{ll} u_1(t) = \ln^2(t) - 1 & u_1'(t) = 2\cdot\ln(t)\cdot\frac{1}{t} \\ v_1'(t) = 1 & v_1(t) = t \end{array}\right.$$

Et donc :

$$F(x) = \Big[t\left(\ln^2(t)-1\right)\Big]_{e^{-1}}^{x} - 2\int_{e^{-1}}^{x}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = x\left(\ln^2(x)-1\right) - 2\underbrace{\int_{e^{-1}}^{x}\ln(t)\,\mathrm{d}t}_{G(x)}$$

Intégrons à nouveau par parties :

$$\left|\begin{array}{ll} u_2(t) = \ln(t) & u_2'(t) = \frac{1}{t} \\ v_2'(t) = 1 & v_2(t) = t \end{array}\right.$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \big[t\,\ln(t)\big]_{e^{-1}}^{x} - \int_{e^{-1}}^{x} 1\,\mathrm{d}t \\
&= \big[t\,\ln(t)\big]_{e^{-1}}^{x} - \big[t\big]_{e^{-1}}^{x} \\
&= x\,\ln(x) + e^{-1} - x + e^{-1} \\
&= x\,\ln(x) - x + 2\,e^{-1}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
F(x) &= x\left(\ln^2(x) - 1\right) - 2\left(x\ln(x) - x + 2\,e^{-1}\right) \\
&= x\left(\ln^2(x) - 1\right) - 2x\ln(x) + 2x - 4\,e^{-1} \\
&= x\Big(\ln^2(x) - 2\,\ln(x) + 1\Big) - \frac{4}{e} \\
&= x\Big(\ln(x) - 1\Big)^2 - \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

(b) Notons $\mathcal{D}$ le domaine en question. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \int_{e^{-2}}^{e-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{e^{-1}}^{e} \Big(-f(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{e^{-1}}^{e} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{e}^{e^{-1}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F\left(e^{-1}\right) - F\left(e^{-2}\right) + F\left(e^{-1}\right) - F(e) \\
&= 2\,F\left(e^{-1}\right) - F\left(e^{-2}\right) - F(e) \qquad \text{(avec } F\left(e^{-1}\right) = 0 \text{ par définition de } F\text{)}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = 2\cdot 0 - \left(\frac{9}{e^2} - \frac{4}{e}\right) - \left(-\frac{4}{e}\right) = \boxed{\frac{8e-9}{e^2}}\ \text{u.a.}$$

.Question V (0,5+4,5+3 = 8 points) *optimisation*

a) Accepter une des réponses : $R\epsilon]0;+\infty[$ ou ~~$R\epsilon$~~ $\left]0;\sqrt{\frac{a}{\pi}}\right[$

b) Volume de la boîte : $a$ ($a$ est une constante strictement positive)

$$V(R)=a$$
$$\Leftrightarrow \pi R^2 h = a$$
$$\Leftrightarrow \quad h=\frac{a}{\pi R^2} \quad (1)$$

$$\mathcal{A}(R)=2\pi R^2+2\pi Rh$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(R)=2\pi R^2+2\pi R\frac{a}{\pi R^2} \text{ (on remplace (1) dans l'égalité)}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(R)=2\pi R^2+\frac{2a}{R}$$

c) $\forall R\epsilon]0;+\infty[$ *resp.* ~~$\forall R\epsilon$~~ $\left]0;\sqrt{\frac{a}{\pi}}\right[$ :

$$\mathcal{A}'(R)=4\pi R-\frac{2a}{R^2}$$
$$=\frac{4\pi R^3-2a}{\underbrace{R^2}_{>0}}$$

$$\mathcal{A}'(R)>0 \Leftrightarrow R^3>\frac{a}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow R>\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

T.V.

| $R$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$ | | $+\infty$ *resp.* $\sqrt{\frac{a}{\pi}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{A}'$ | | - | 0 | + | |
| $\mathcal{A}$ | | $\searrow$ | Min $S\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}\right)$ | $\nearrow$ | |

L'aire $\mathcal{A}$ est minimale lorsque le rayon R vaut $\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$ $(u.\ell.)$

Question VI (2,5 + 7,5 = 10 points) *compréhension*

a) T.V.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\approx 2{,}6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | | $(5)$ | $+$ | $0$ | | $-$ |
| $f$ | | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ | $(5)$ | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | |

b) Informations lisibles sur le graphique:

$$f'(0) = 0$$
$$f'(1) = 5$$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$f'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \boldsymbol{c = 0}$

$f'(1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \qquad \Leftrightarrow 3a + 2b = 5$ (1)

De plus, d'après l'énoncé :

$f(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 2 \qquad \Leftrightarrow \boldsymbol{d = 2}$

$f(1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 5 \quad \Leftrightarrow a + b + 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 3$ (2)

En remplaçant (2) dans (1) :

$3a + 2(3 - a) = 5 \qquad \Leftrightarrow 3a + 6 - 2a = 5 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a = -1}$

En remplaçant dans (2) : $\boldsymbol{b = 4}$

Donc la fonction cherchée est définie par $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 2$

---

Théorie (8-10 points permis) : 9 points
Techniques de calcul (29-35 points permis) : 15 + 4 +14 = 33 points
Compréhension (10-12 points permis) : 10 points
Optimisation (7-9 points permis) : 8 points