BRANCHE : ***Mathématiques II***

DATE : 19 septembre 2012 *DUREE :* *2 h 15 min*

Question 1

Démontrez que, si f est une fonction continue sur un intervalle I et a est un réel de I, alors la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a)=0$.

8 points

Question 2

On pose $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ $z_2=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$ et $Z=\frac{z_1}{z_2}$.

1. Écrivez z_1, z_2 et Z sous forme exponentielle.
2. Donnez la forme algébrique de Z.
3. Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

8 points (4 + 2 + 2)

Question 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Par une méthode géométrique, déterminez l'ensemble Γ_1 des points M dont l'affixe z vérifie la condition $|\overline{z}+3-2i|=|4-z|$.
2. Déterminez l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $\frac{\overline{z}+3i}{\overline{z}-2}$ soit un imaginaire pur.

7 points (2 + 5)

Question 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives : $a=-1+4i$, $b=-2+i$, $c=4-i$.

1. Calculez une mesure de $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$.
2. Déduisez-en la nature du triangle ABC.
3. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Indiquez, en justifiant, l'affixe du centre I de Γ ainsi que le rayon de Γ.
   b. Caractérisez par une condition sur son affixe z l'appartenance d'un point M à Γ.

9 points [3 + 1 + (4 + 1)]

Question 5

1. Calculez $I=\int_{-1}^{2}\frac{-6x+4}{\sqrt{3x^2-4x+2}}\,dx$.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{6e^{2x}+6x}{1+x^2+e^{2x}}$. Trouvez la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=1$.

5 points (2 + 3)

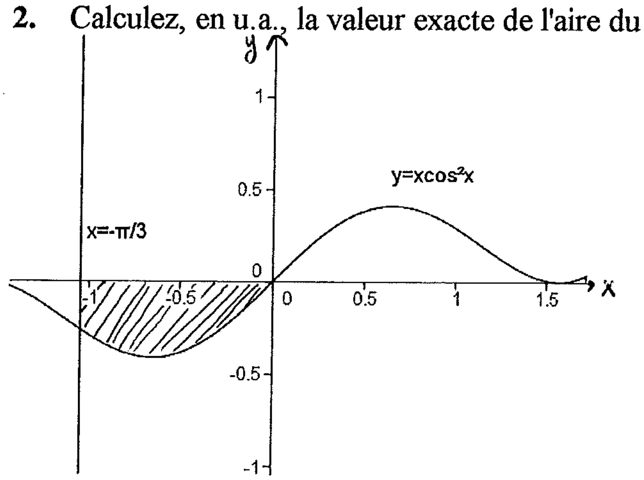
Question 6

1. **a.** Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel $x\neq-1$, $\frac{x^3}{1+x}=ax^2+bx+c+\frac{d}{1+x}$

   b. Calculez $I=\int_0^1\frac{x^3}{1+x}\,dx$.

   c. A l'aide d'une intégration par parties, exprimez $J=\int_0^1 x^2\ln(1+x)\,dx$ en fonction de I, puis calculez J.

2. Calculez, en u.a., la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré.



15 points [(2 + 3 + 3) + 7]

Question 7

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A(2;1;0)$ et $B(-1;1;1)$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$: $x-2y-z-5=0$.

Après avoir vérifié que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, donnez une équation du plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et qui passe par les points A et B.

8 points

La Commissaire du Gouvernement,