Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

Session 2012

BRANCHE : ***MATHEMATIQUES II***

DATE : 4 juin 2012 *DUREE :* *2 heures 15 minutes*

I. Démontrez les théorèmes suivants:

Théorème 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
A, B, C et D sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.
Alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

Théorème 2 : f est une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

4+6 = 10 points

II. On donne les nombres complexes $z_1 = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$ et $z_2 = 2ie^{i\frac{3\pi}{4}}$.

a) Écrivez z_1 et z_2 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

b) Déterminez z_1^3.

c) Déterminez une forme exponentielle et la forme algébrique de $\overline{z_1} \cdot z_2$.

7+1+3 = 11 points

III. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. M désigne un point d'affixe $z = x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

On pose $z' = \overline{(z+3i)}(z-4)$. Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

5 points

IV. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = 5 + 3i$, $b = 1 + i$; $c = -1 - 3i$.

a) Montrez que le triangle ABC est isocèle.

b) On note e l'affixe du milieu E de [AC]. Déterminez e.

c) Calculez l'affixe d du point D tel que ABCD est un losange en utilisant les deux questions précédentes.

2+1+2 = 5 points

V. a) Montrez que la fonction F définie par $F(x) = \ln(x^2 - 1)$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ sur $]1 ; +\infty[$.

b) Trouvez deux réels a et b tels que pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

Déduisez-en $I = \int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx$.

c) En utilisant une intégration par parties, calculez $J = \int_2^3 \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}\,dx$.

1+4+4 = 9 points

La Commissaire du Gouvernement,

VI. Calculez les intégrales suivantes :

a) $I=\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}$ b) $J=\int_1^e (t-1)\ln t\,dt$ c) $K=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+1}{\cos^2 x}dx$

3+4+4 = 11 points

VII. Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, on donne les deux points A(3 ; 1 ; -1) et B(5 ; -3 ; -4) et les vecteurs $\vec{u}$ (1 ; -1 ; 2) et $\vec{v}$ (2 ; 1 ; 0).

Soit P le plan passant par A et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) Déterminez AB et $\vec{u}\cdot\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)$.

b) Montrez que la droite (AB) est perpendiculaire au plan P.

c) Déterminez une équation cartésienne du plan P.

3+3+3 = 9 points