

Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2012

BRANCHE : MATHÉMATIQUES II

DATE : 4 juin 2012

DURÉE : 2 heures 15 minutes

I. Démontrez les théorèmes suivants:

Théorème 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C et D sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Alors $\arg\left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

Théorème 2 : f est une fonction définie sur un intervalle I . Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

4+6 = 10 points

II. On donne les nombres complexes $z_1 = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$ et $z_2 = 2ie^{i\frac{3\pi}{4}}$.

a) Écrivez z_1 et z_2 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

b) Déterminez z_1^3 .

c) Déterminez une forme exponentielle et la forme algébrique de $\overline{z_1} \cdot z_2$.

7+1+3 = 11 points

III. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. M désigne un point d'affixe $z = x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

On pose $z' = (\overline{z+3i})(z-4)$. Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

5 points

IV. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = 5 + 3i$, $b = 1 + i$; $c = -1 - 3i$.

a) Montrez que le triangle ABC est isocèle.

b) On note e l'affixe du milieu E de [AC]. Déterminez e .

c) Calculez l'affixe d du point D tel que ABCD est un losange en utilisant les deux questions précédentes.

2+1+2 = 5 points

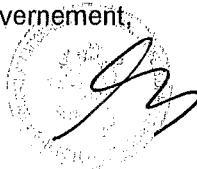
V. a) Montrez que la fonction F définie par $F(x) = \ln(x^2 - 1)$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ sur $]1; +\infty[$.

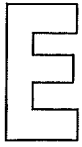
b) Trouvez deux réels a et b tels que pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

Déduisez-en $I = \int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx$.

c) En utilisant une intégration par parties, calculez $J = \int_2^3 \frac{\ln(x^2-1)}{x^2} dx$.

1+4+4 = 9 points





Ministère de l'Éducation Nationale et de la Formation Professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2012

VI. Calculez les intégrales suivantes :

a) $I = \int_1^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{5-x^2}}$

b) $J = \int_1^e (t-1) \ln t \, dt$

c) $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} \, dx$

3+4+4 = 11 points

VII. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les deux points $A(3; 1; -1)$ et $B(5; -3; -4)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; -1; 2)$ et $\vec{v}(2; 1; 0)$.

Soit P le plan passant par A et ayant pour vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .

a) Déterminez AB et $\vec{u} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.

b) Montrez que la droite (AB) est perpendiculaire au plan P.

c) Déterminez une équation cartésienne du plan P.

3+3+3 = 9 points

