Mathématiques II   9 juin 2011 Session 2011   Repêchage Corrigé   1/6

8p. **Question 1** question de cours

11p. **Question 2**

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2}{2-x} \quad \text{sur }]-\infty ; 2[$$

(3p.) a)

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 & -x+2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} & \overline{-x^2-5x-10} \\ \quad 5x^2 & \\ \quad \underline{-5x^2+10x} & \\ \qquad 10x & \\ \qquad \underline{-10x+20} & \\ \qquad\quad 20 & \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x^3+3x^2 = (-x+2)\cdot(-x^2-5x-10) + 20$

$\forall x \in]-\infty ; 2[: \quad f(x) = -x^2-5x-10 + \frac{20}{2-x}$

Donc : $\begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = -10 \\ d = 20 \end{cases}$

(2p.) b) $\forall x \in]-\infty ; 2[: \quad F(x) = -\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 10x - 20 \ln|2-x|$

$$= -\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 10x - 20\ln(2-x)$$

(6p.) c) Aire du domaine foncé :

$$\mathcal{A} = -\int_{-2}^{0} g(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= +\int_0^{-2} (3x^2+6x)\ln(2-x)\,dx + \int_0^1 (3x^2+6x)\ln(2-x)\,dx$$

$$\begin{bmatrix} u(x) = \ln(2-x) & v'(x) = 3x^2+6x \\ u'(x) = \frac{-1}{2-x} & v(x) = x^3+3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \left[(x^3+3x^2)\ln(2-x)\right]_0^{-2} + \int_0^{-2} \frac{x^3+3x^2}{2-x}\,dx + \left[(x^3+3x^2)\ln(2-x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{2-x}\,dx$$

$$= (-8+12)\ln 4 + \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 10x - 20\ln(2-x)\right]_0^{-2} + 0 + \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 10x - 20\ln(2-x)\right]_0^1$$

$$= 4\ln 4 + \frac{8}{3} - \cancel{10} + \cancel{20} - \cancel{20\ln 4} + \cancel{20\ln 2} - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} - \cancel{10} + \cancel{20\ln 2}$$

$$= \left(8\ln 2 - \frac{1}{6}\right) \text{ u.a.}$$

$$\simeq 5{,}38 \text{ u.a.}$$

6p. **Question 3**

$$I = \int_0^{\pi} e^{1-t} \cos(2t)\, dt$$

$$= \left[-e^{1-t} \cdot \cos(2t)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^{1-t} \sin(2t)\, dt$$

$u(t) = \cos(2t)$ $\quad v'(t) = e^{1-t}$
$u'(t) = -2\sin(2t)$ $\quad v(t) = -e^{1-t}$

$u_1(t) = \sin(2t)$ $\quad v'(t) = e^{1-t}$
$u_1'(t) = 2\cos(2t)$ $\quad v(t) = -e^{1-t}$

$$= -e^{1-\pi} + e - 2\left(\underbrace{\left[-e^{1-t} \cdot \sin(2t)\right]_0^{\pi}}_{0} + 2\underbrace{\int_0^{\pi} e^{1-t} \cos(2t)\, dt}_{I}\right)$$

$$= -e^{1-\pi} + e - 4I$$

$$I = -e^{1-\pi} + e - 4I$$

$$\Leftrightarrow 5I = -e^{1-\pi} + e$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{e - e^{1-\pi}}{5}}$$

10p. **Question 4**

(3p.) a) 1) $Z = \frac{z+i}{z-2i}$ $\quad (z \neq 2i)$

$M'(Z)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1

$\Leftrightarrow |Z| = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z-2i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z+i| = |z-2i|$

E_1 est la médiatrice de $[AB]$ avec $A(-i)$ et $B(2i)$
(c.-à-d. la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$).

(4p.) 2) $z = x + iy$ avec x, y réels

$$Z = \frac{x+iy+i}{x+iy-2i} \cdot \frac{x-iy+2i}{x-iy+2i} = \frac{x^2 - \cancel{ixy} + 2xi + \cancel{ixy} + y^2 - 2y + ix + y - 2}{x^2 + (y-2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-y-2+i(3x)}{x^2+(y-2)^2}$$

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2+y^2-y-2=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2=0$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

condition:

$z\neq 2i$ c.-à-d. $(x,y)\neq(0,2)$

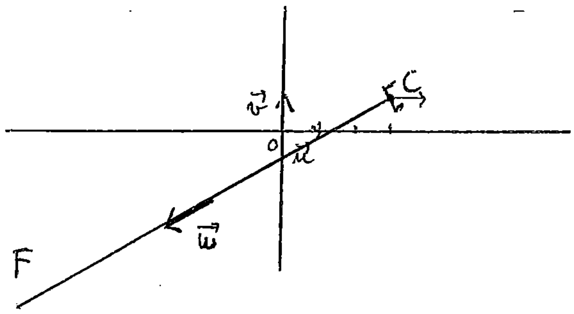
E_2 est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$,

privé du point $B(2i)$.

(3p.) b) $\arg(\bar{z}-3+i)=\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \arg(z-3-i)=-\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{CM})=\frac{-5\pi}{6}$ avec $C(3+i)$



F est la demi-droite ouverte d'origine C et dirigée par un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{w})=-\frac{5\pi}{6}$.

12p. Question 5

(3p.) a) $c = 3 + \sqrt{3}\, i$

$|c| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$c = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\, i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)$

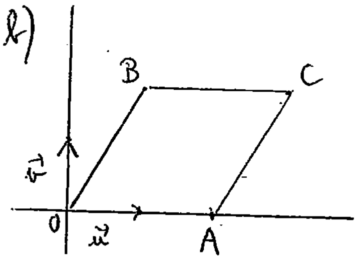
$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{3}\; e^{i\pi/6}$

$b = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + \sqrt{3}\, i$

(3p.) b)



$OA = |a| = 2$

$OB = |b| = 2$

$AC = |c-a| = |1+\sqrt{3}\, i| = \sqrt{4} = 2$

$BC = |c-b| = |2| = 2$

- Comme $OA = OB = AC = BC$, OACB est un losange.

(3p.) c) $c - a = 1 + \sqrt{3}\, i$; $c - d = 3 + \sqrt{3}i - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\, i$

On a: $\underbrace{c-d}_{z_{\overrightarrow{DC}}} = \frac{3}{2} \cdot \underbrace{(c-a)}_{z_{\overrightarrow{AC}}}$

Ainsi $\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ et A, D et C sont alignés.

(3p.) d) $\frac{d}{d-a} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \frac{3 - \sqrt{3} i}{-1 - \sqrt{3} i} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3} i}{-1 + \sqrt{3} i} = \frac{\cancel{-3} + 3\sqrt{3} i + \sqrt{3} i + \cancel{3}}{1+3}$

$= \sqrt{3}\, i$

Alors:

$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DO}) = \arg \frac{0-d}{a-d} = \arg \frac{d}{d-a} = \arg(\sqrt{3}\, i) = \frac{\pi}{2}$

13p. Question 6

$A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(1;-2;1)$

$\mathcal{P}: 3x+y-z-2=0$

(7p.) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$: $\vec{n}_{\mathcal{P}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{AB}$ et $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ ne sont pas colinéaires ($\nexists k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{AB}=k\cdot\vec{n}_{\mathcal{P}}$), donc (AB) n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Soit $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à Q.

On a: $\vec{AB}\perp\vec{n}_Q$ et $\vec{n}_{\mathcal{P}}\perp\vec{n}_Q$ c-à-d. $\begin{cases}\vec{AB}\cdot\vec{n}_Q=0\\ \vec{n}_{\mathcal{P}}\cdot\vec{n}_Q=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+3b=0\\3a+b-c=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3b\\c=-8b\end{cases}$

D'où: $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}-3b\\b\\-8b\end{pmatrix}$

Choisissons $b=-1$, alors $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}3\\-1\\8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q et Q a pour équation: $3x-y+8z+d=0$ $(d\in\mathbb{R})$

$A(1;0;-1)\in Q\Leftrightarrow 3-8+d=0\Leftrightarrow d=5$

D'où: $\boxed{Q:\ 3x-y+8z+5=0}$

(3p.) b) Soit $\mathcal{P}'$ le plan médiateur de $[AB]$.
$\vec{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ et $I=\text{mil}[AB]$ appartient à $\mathcal{P}'$.

$\mathcal{P}': x+3y+d'=0$ $(d'\in\mathbb{R})$

$I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)\in\mathcal{P}'\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{9}{2}+d'=0\Leftrightarrow d'=-6$

D'où: $\boxed{\mathcal{P}':\ x+3y-6=0}$

(3p.) c) $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB}$

$\vec{CA}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad 10 + 4 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{30} \cdot \cos \widehat{ACB}$

$\Leftrightarrow \quad \cos \widehat{ACB} = \dfrac{14}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{30}}$

Donc $\boxed{\widehat{ACB} \simeq 25{,}35^\circ}$

6/6