Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

1re Session 2011

BRANCHE : ***Mathématiques II***

DATE : Lundi 6 juin 2011 *DUREE :* *2h15min*

Question 1 $5+2+5=12$ points

Considérons les nombres complexes :

$$z_1 = -3 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = \sin\tfrac{\pi}{6} + i\cos\tfrac{\pi}{6} \qquad z_3 = -\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(a) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

(b) En déduire que le nombre $Z = \overline{z_1}^2 \cdot z_2^5$ est réel.

(c) Exprimer $Z' = \frac{z_3}{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle et en tirer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Question 2 $4+2+3+3=12$ points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A = -2 + i\sqrt{3} \qquad z_B = 1 + i\,2\sqrt{3} \qquad z_C = 4 - i\sqrt{3} \qquad z_D = 1 - \sqrt{3} - 3i$$

(a) Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

(b) Notons $\Omega(z_\Omega)$ le milieu du segment $[AC]$. Caractériser l'appartenance d'un point $M(z)$ au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AC]$.

(c) Soit Γ l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$\left|\overline{z} + 2 + i\sqrt{3}\right| = \left|z - 4 + i\sqrt{3}\right|$$

Décrire Γ à l'aide d'une interprétation géométrique.

(d) Vérifier que $D \in \mathscr{C}$ et que $D \in \Gamma$ et en déduire la nature du triangle ACD.

Question 3 $6+2=8$ points

(a) Démontrer le théorème suivant :

> f est une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinités de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

(b) Démontrer le corollaire suivant :

> x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque. Alors il existe une primitive et une seule G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

La Commissaire du Gouvernement,

Question 4 $3+2+3=8$ points

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x(2x-1)^2}$. Posons $x_0=\frac{1}{4}$.

(a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$:

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{(2x-1)^2}$$

(b) En déduire la primitive F de f telle que $F(x_0)=0$ sur un intervalle I à préciser.

(c) Soit G la fonction définie sur I par $G(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\ln t}{(2t-1)^3}\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties, montrer que :

$$G(x)=-\frac{\ln x}{4(2x-1)^2}-2\ln 2+\frac{1}{4}F(x)$$

Question 5 $5+3=8$ points

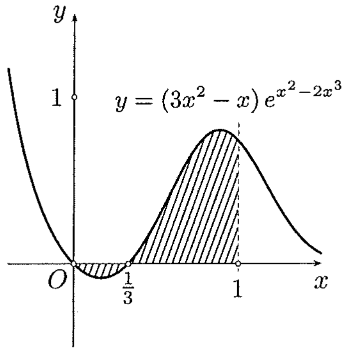
(a) Considérons les intégrales suivantes :

$$I=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2(\sqrt{x}\,)\,\mathrm{d}x$$

$$J=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin^2(\sqrt{x}\,)\,\mathrm{d}x$$

Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire les valeurs de I et J.

(b) Calculer, en u.a., l'aire du domaine hachuré ci-contre.



Question 6 $1+3+2+1+5=12$ points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Considérons les points de coordonnées $A(3;1;-5)$, $B(5;2;-7)$ et $C(4;3;-3)$.

(a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

(b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).

(d) Vérifier que la droite (OA) n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

(e) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et qui passe par les points O et A.