1 (a) En notant que $|z_1| = 2\sqrt{3}$, on a :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Comme :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi},$$

on en déduit que : $\boxed{z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

Pour z_2 :

$$\begin{aligned} z_2 &= \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

et donc : $\boxed{z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Finalement, puisque $-1 = e^{i\pi}$:

$$z_3 = e^{i\pi}\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}$$

de sorte que : $\boxed{z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

(b) Z est bien réel car :

$$\begin{aligned} Z &= \overline{z_1}^2 \cdot z_2^5\\ &= \left(2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5\\ &= 12\, e^{-i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}\\ &= \boxed{12} \end{aligned}$$

(c) Sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \frac{-1+i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \frac{(-1+i)\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2} \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Sous forme exponentielle :

$$Z' = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} \qquad (\ddagger)$$

De ($\dagger$) et ($\ddagger$), on déduit que :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{5\pi}{12}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\Re\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \boxed{\cos\tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Im\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \boxed{\sin\tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

2 (a) Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{6 - i\,2\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}\\ &= \frac{(6 - i\,2\sqrt{3})\cdot(3 - i\sqrt{3})}{12}\\ &= \frac{12 - i\,12\sqrt{3}}{12}\\ &= 1 - i\sqrt{3}\\ &= 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Et donc : $\boxed{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{3}} \pmod{2\pi}$

(b) Remarquons d'abord que :

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_C}{2} = 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff |z - z_\Omega| = |z_A - z_\Omega|\\ &\iff |z - 1| = \sqrt{12}\\ &\iff \boxed{|z - 1| = 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\iff \left|\overline{z + 2 - i\sqrt{3}}\right| = \left|z - 4 + i\sqrt{3}\right|\\ &\iff \left|z + 2 - i\sqrt{3}\right| = \left|z - 4 + i\sqrt{3}\right|\\ &\iff \left|z - (-2 + i\sqrt{3})\right| = \left|z - (4 - i\sqrt{3})\right|\\ &\iff |z - z_A| = |z - z_C| \end{aligned}$$

Par conséquent Γ est la $\boxed{\text{médiatrice de } [AC]}$.

(d) D'une part $D \in \mathscr{C}$ car :

$$|z_D - 1| = |-\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{12} \overset{!}{=} 2\sqrt{3}$$

ACD est donc un $\boxed{\text{triangle rectangle en } D}$ par la *propriété du cercle de Thalès*. D'autre part $D \in \Gamma$ car :

$$\begin{aligned}
|z_D - z_A| &= \left|3 - \sqrt{3} - i(3 + \sqrt{3})\right| \\
&= \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2 + (3 + \sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{24} \\
&= \sqrt{(-3 - \sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2} \\
&= \left|-3 - \sqrt{3} - i(3 - \sqrt{3})\right| \\
&\overset{!}{=} |z_D - z_C|
\end{aligned}$$

Par conséquent le triangle ACD est également $\boxed{\text{isocèle}}$ de sommet principal D.

$\boxed{4}$ **(a)** Par la *méthode d'identification des coefficients* on a :

$$\begin{aligned}
& f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{(2x-1)^2} \\
\iff\ & 1 = a(2x-1)^2 + bx(2x-1) + cx \\
\iff\ & 1 = (4a + 2b)x^2 + (-4a - b + c)x + a \\
\iff\ & \begin{cases} \boxed{a = 1} \\ 4a + 2b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = -2} \\ -4a - b + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = 2} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) La primitive cherchée sur $I =]0; \frac{1}{2}[$ est :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{2t-1} + \frac{2}{(2t-1)^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \Big[\underbrace{\ln t}_{t>0 \text{ sur } I} - \underbrace{\ln(1-2t)}_{2t-1<0 \text{ sur } I} - \frac{1}{2t-1}\Big]_{x_0}^{x} \\
&= \boxed{\ln\left(\tfrac{x}{1-2x}\right) - \tfrac{1}{2x-1} + \ln 2 - 2}
\end{aligned}$$

(c) Posons :

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{(2t-1)^3} & v(t) = -\frac{1}{4(2t-1)^2} \end{array}\right.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \left[-\frac{\ln t}{4(2t-1)^2}\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln x}{4(2x-1)^2} + \frac{-\ln 4}{1} + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln x}{4(2x-1)^2} - 2\ln 2 + \frac{1}{4}F(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **(a)** Calculons d'abord $I + J$ et $I - J$:

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\left(\cos^2(\sqrt{x}) + \sin^2(\sqrt{x})\right)}_{=1} \mathrm{d}x \\
&= \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \\
&= 2\pi - \pi \\
&= \boxed{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I - J &= \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\left(\cos^2(\sqrt{x}) - \sin^2(\sqrt{x})\right)}_{=\cos(2\sqrt{x})} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\sin(2\sqrt{x})\right]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \\
&= \sin(2\pi) - \sin\pi \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{I = J = \frac{\pi}{2}}$

(b) Notons $\mathcal{D}$ le domaine en question et soit f la fonction définie par $f(x) = (3x^2 - x)\,e^{x^2 - 2x^3}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\mathcal{D}) &= \int_0^{\frac{1}{3}} -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x^2-2x^3}\right]_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\left[e^{x^2-2x^3}\right]_{\frac{1}{3}}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{27}} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{\frac{1}{27}}\right) \\
&= \boxed{\left(e^{\frac{1}{27}} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2e}\right) \text{ u.a.}}
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ **(a)** On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

(b) Le triangle ABC est $\boxed{\text{isocèle}}$ car :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = 3$$
$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$$

De plus, ABC est $\boxed{\text{rectangle en } A}$ car :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-2)\cdot 2 \overset{!}{=} 0$$

(c) Par hypothèse le plan $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à la droite (AB), donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Ainsi :

$$\mathcal{P}\colon 2x+y-2z+d=0 \quad (d\in\mathbb{R})$$

Comme $C\in\mathcal{P}$:

$$2\cdot 4+3-2\cdot(-3)+d=0 \iff d=-17$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{P}\colon 2x+y-2z-17=0}$$

(d) La droite (OA) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Or, comme $\overrightarrow{OA}\,(3;1;-5)$, il n'existe pas $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OA}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$.

(e) Notons $\vec{n}\,(a;b;c)$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$, avec a, b et c réels. Alors :

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{P}\perp\mathcal{Q}\\ O,A\in\mathcal{Q}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll}2a+b-2c=0 & (\dagger)\\ 3a+b-5c=0 & (\ddagger)\end{array}\right.$$

En soustrayant $(\dagger)$ de $(\ddagger)$, on déduit que :

$$a-3c=0 \iff \boxed{c=\tfrac{1}{3}a}$$

Remplaçons cette expression dans $(\dagger)$:

$$b=2c-2a=2\cdot\frac{a}{3}-2a \iff \boxed{b=-\tfrac{4}{3}a}$$

En choisissant $a=3$, on obtient :

$$\mathcal{Q}\colon 3x-4y+z+d=0 \quad (d\in\mathbb{R})$$

Finalement, comme $O\in\mathcal{Q}$, $d=0$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{Q}\colon 3x-4y+z=0}$$