**Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle**

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

**Régime technique – Division technique générale**

1re **Session 2010**

***BRANCHE :*** ***Mathématiques I***

*DATE :* 18 mai 2010 *DUREE : 2h15*

---

**<u>Question 1</u>** (5 + 3 = 8 points)

1) a) Démontrer que pour tous réels $a>0$, $b>0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

   b) En déduire que pour tous réels $a>0$, $b>0$, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

2) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$.

**<u>Question 2</u>** (3 + 3 + 3 = 9 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty;-5]\cup[2;+\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+3x-10}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Démontrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ *en* $+\infty$.

c) Etudier la dérivabilité de $f$ en 2. Interpréter graphiquement ce résultat.

**<u>Question 3</u>** (3 + 3 + 1 + 4 = 11 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.

2) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

3) Trouver une équation de la tangente $T_0$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4) Tracer $T_0$ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

---

La Commissaire du Gouvernement,

**Question 4** (2 + 4 + 3 = 9 points)

1) Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-e+e^{-x}\right)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x}>2+15e^{-x}$

3) *f* est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Déterminer la fonction *f* telle que :
- pour tout x réel, $f(x)+4f'(x)=0$
- le point $A(8;2)$ est un point de $\mathcal{C}_f$

**Question 5** ((1 + 2 + 2 + 1)+ (2 + 4 + 3) = 15 points)

1) Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-3+3\ln x$.

   a) Étudier les limites de $g$ aux bornes du domaine de définition.

   b) Étudier les variations de $g$ sur $]0;+\infty[$.

   c) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0;+\infty[$, puis donner de $\alpha$ un encadrement d'amplitude $10^{-1}$.

   d) En déduire le signe de $g$ sur $]0;+\infty[$.

2) Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+2-3\dfrac{\ln x}{x}$.

   $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

   a) Étudier les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition et préciser d'éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

   b) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $d$ en $+\infty$ dont on déterminera une équation, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $d$.

   c) Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de $f$ sur $]0;+\infty[$.

**Question 6** (8 points)

Soit *f* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=2e^{x}+(x+2)e^{-x}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Démontrer qu'il existe une seule tangente à $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur 2.