Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

2e Session 2009

BRANCHE : MATHÉMATIQUES I

DATE : 15 septembre 2009 DUREE : 2 heures 15 min

I. Démontrer : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$.

5+3 = 8 points

II. On donne la fonction f définie sur l'intervalle I.
Déterminer la dérivée de f ; écrire le résultat sous la forme la plus simple.

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \qquad I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

4 points

III. On donne la fonction f définie sur $]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 9}$;
soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) a. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Vérifier ensuite que la droite Δ_1 d'équation $y = \frac{3}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2) a. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ conduit à une forme indéterminée.

b. Lever cette indétermination en mettant x en évidence ; calculer la limite.

c. Vérifier que la droite Δ_2 d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

3) Est-ce que f est dérivable en $x = 3$? Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

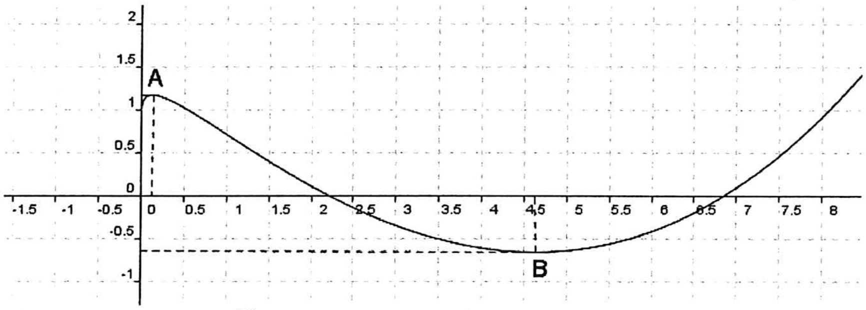
(1+3)+(1+2+3)+4 = 14 points

IV On donne la fonction f par : $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{\ln(x-1)}{x}$ définie sur $I=]1;+\infty[$; soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Calculer les limites aux bornes de I et en déduire les équations d'éventuelles asymptotes parallèles aux axes du repère.
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
3) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ

2+3+3 = 8 points

V Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^{\sqrt{x}}-2x$.



1) Montrer que $\mathscr{C}$ présente un maximum en A et un minimum en B.
2) Déterminer les abscisses de A et de B à 10^{-2} près en précisant les calculs.

8+2 = 10 points

VI Soit f la fonction définie par : $f(x)=(1-x)^2 e^{1-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 1cm).

1) Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes du domaine. Écrire les équations des asymptotes parallèles aux axes du repère.
2) Étudier les variations de f.
3) Donner une équation de la tangente t à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4+4+2 = 10 points

VII. 1) Résoudre l'équation suivante : $3e^{2x}-20=7e^{x}$

2) Résoudre l'équation différentielle : $y'-3y+2=0$; déterminer la solution f telle que $f(0)=1$.

4 +2 = 6 points

Le Commissaire du Gouvernement