Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
1re Session 2009 Repêchage

BRANCHE : ***Mathématiques II***

DATE : 15 Juin 2009 DUREE : 2 h 15 min

Question 1 **(5 + 4 = 9 points)**

Démontrez :

a) f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive quelconque de f sur I, a et b sont deux réels de I. Alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

b) Si, dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

Question 2 **(2 + 3 = 5 points)**

On considère le nombre complexe $z = -2-2i\sqrt{3}$.

Donnez une forme exponentielle de z, puis déduisez-en la forme algébrique de $\left(\overline{z}\right)^4$.

Question 3 **(3 + 3 = 6 points)**

Pour tout complexe $z \neq 2i$, on pose : $z' = \dfrac{3+\overline{z}}{2i+\overline{z}}$; $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ avec x, y, x', y' réels.

a) Calculez x' et y' en fonction de x et y. On vérifiera que $x' = \dfrac{3x+x^2-2y+y^2}{x^2+(2-y)^2}$ et $y' = \dfrac{-6+3y-2x}{x^2+(2-y)^2}$.

b) Déduisez-en la nature de l'ensemble E des points $m(z)$ tels que z' soit imaginaire pur.

Question 4 **((5 + 3) + 2 = 10 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives :

$a = 5+2i$, $b = 8+i$, $c = 3\sqrt{3}+6+i\left(5-\sqrt{3}\right)$, $d = 13i$

1) Calculez une mesure de $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) Calculez l'affixe e du milieu E de [BD], puis prouvez que les points B et E appartiennent à un même de cercle de centre O.

b) Par une méthode géométrique, déterminez l'ensemble Γ des points $\mathrm{M}(z)$ dont l'affixe vérifie la condition : $\left|\overline{z}+2+3i\right| = \left|z-2\right|$

Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

Session 2009

<u>Question 5</u> **(5 + 4 + 6 + 5 = 20 points)**

a) f est la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{4-x}}$.

Trouvez la primitive F de f qui vérifie $F(-5)=-10$ sur un intervalle I à préciser.

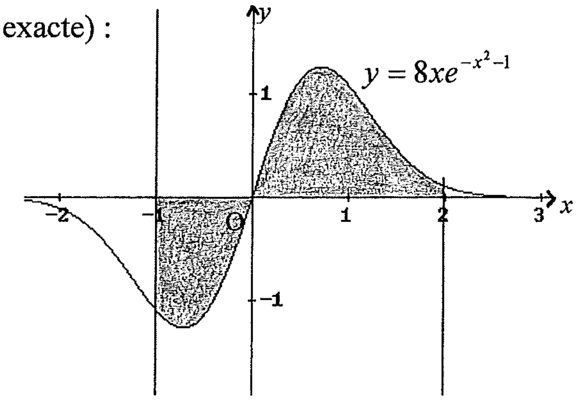
b) Calculez $\int_2^{e^2} x^3 \ln x \, dx$.

c) Déterminez les réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de $-\dfrac{9}{2}$ et de $\dfrac{9}{2}$, on a :

$$\frac{-12x^2-4x+297}{4x^2-81}=a+\frac{b}{2x-9}+\frac{c}{2x+9}$$

et déduisez-en $\int_0^3 \dfrac{-12x^2-4x+297}{4x^2-81}\,dx$. Donnez le résultat sous la forme $p+q\ln 3+r\ln 5$ avec p, q et r rationnels.

d) Calculez, en u.a., l'aire du domaine coloré (valeur exacte) :



<u>Question 6</u> **(2 + 4 + 4 = 10 points)**

Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on donne les points $A\left(1;2;\dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2};-1;0\right)$ et $C(2;-2;-2)$.

a) Vérifiez que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Vérifiez que le vecteur $\vec{v}(2;-3;4)$ est un vecteur normal au plan (ABC), puis déterminez une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminez la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.