Juin 2009

I 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to+\infty} - \underbrace{2x}_{\to-\infty}\right) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-3x-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-6}-2x+3x+\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to+\infty}+\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\to-\infty}\right]$ f.i.

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-6}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x-6}-\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\cancel{+x}-6\cancel{-x^2}\cancel{-x}-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x-6}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{25}{4}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to+\infty}-\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\to+\infty}} = 0$$

La droite d'équation $y=-3x-\frac{1}{2}$ est donc une A.O. à C_f en $-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to-3^-}\frac{\sqrt{x^2+x-6}-2x-6}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3^-}\frac{\sqrt{x^2+x-6}-2(x+3)}{x+3}$

$$= \lim_{x\to-3^-}\left(\frac{\overbrace{\sqrt{x^2+x-6}}^{\to 0}}{\underbrace{x+3}_{\to 0}}-2\right) \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-3^-}\left(\frac{x^2+x-6}{(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}-2\right) = \lim_{x\to-3^-}\left(\frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}\sqrt{x^2+x-6}}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to-3^-}\left(\frac{\overbrace{x-2}^{\to-5}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to 0^+}}-2\right) = -\infty$$

f n'est pas dérivable en (-3).

C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse (-3), c.-à-d. en $A(-3;6)$.

4. $\forall x \in \left]-\infty;-3\right[:\ f'(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{<0}}{\underbrace{2\sqrt{x^2+x-6}}_{>0}} - 2 < 0$

T.V. de f:

x	$-\infty$		-3
$f'(x)$		$-$	‖
f	$+\infty$	↘	6

III 1.

$\ln\left(x^3 - x\right) = \ln\left(2x^2 - 2\right)$

C.E.

$x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

T.S. de $x\left(x^2 - 1\right)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x\left(x^2 - 1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 - 1\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

Donc $E = \left]1;+\infty\right[$

$\forall x \in E:$ $\quad \ln\left(x^3 - x\right) = \ln\left(2x^2 - 2\right) \Leftrightarrow x^3 - x = 2x^2 - 2$ car ln est une fct. str.$\uparrow$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) - 2\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = -1}_{\notin E} \text{ ou } \underbrace{x = 1}_{\notin E} \text{ ou } \underbrace{x = 2}_{\in E}$$

$$S = \left\{2\right\}$$

2.

$$\left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - 2\right) \cdot \left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\right] = 0$$

C.E.

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\end{array}\right\} \Rightarrow E = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$$

$\forall x \in E:$

$$\left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - 2\right) \cdot \left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - 2\right) = 0 \text{ ou } \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \ln 2 \text{ ou } \frac{x-1}{x+1} = e^2 \Leftrightarrow x - 1 = \ln 2\left(x + 1\right) \text{ ou } x - 1 = e^2\left(x + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = x\ln 2 + \ln 2 \text{ ou } x - 1 = e^2 x + e^2$$

$$\Leftrightarrow x - x\ln 2 = 1 + \ln 2 \text{ ou } x - e^2 x = 1 + e^2$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 - \ln 2\right) = 1 + \ln 2 \text{ ou } x\left(1 - e^2\right) = 1 + e^2 \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{1 + \ln 2}{1 - \ln 2}}_{\in E} \text{ ou } x = \underbrace{\frac{1 + e^2}{1 - e^2}}_{\in E}$$

$$S = \left\{\frac{1 + \ln 2}{1 - \ln 2}; \frac{1 + e^2}{1 - e^2}\right\}$$

IV 1. Équation de la tangente t_2 :

$$y - f\left(2\right) = f'\left(2\right)\left(x - 2\right) \Leftrightarrow y - e^2 = e^2\left(x - 2\right) \Leftrightarrow y = e^2 x - 2e^2 + e^2$$

$$\Leftrightarrow y = e^2 x - e^2$$

2. Position de C_f par rapport à t_2 :

Afin de déterminer la position de C_f par rapport à t_2, il faut étudier le signe de $\varphi(x) = f(x) - (e^2x - e^2) = e^x - e^2x + e^2$

Pour déterminer le signe de $\varphi(x)$, nous allons étudier les variations de la fonction φ.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = e^x - e^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle 0 \Leftrightarrow e^x - e^2 \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle 0 \Leftrightarrow e^x \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle e^2 \Leftrightarrow x \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle 2$

T.V. de φ :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$\varphi(2)=0$	$\nearrow$	

φ est str. décroissante sur $]-\infty;2[$ et str. croissante sur $]2;+\infty[$.

$\varphi(2) = e^2 - 2e^2 + e^2 = 0$ est le minimum de la fonction φ.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) \geq 0$.

Par suite : La courbe C_f est toujours située au-dessus de la tangente t_2.

V. 1. Limites aux bornes de I :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\underbrace{x+5}_{\to 5} + \underbrace{\ln\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 0^+}}{x+3} \right)}_{\to -\infty} \right) = -\infty \qquad \text{A.V.} : x = 0$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{x+5}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln\left(\overbrace{\frac{x}{x+3}}^{\to 1} \right)}_{\to 0} \right) = +\infty \qquad \text{(pas d'A.H.)} \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \right)$$

La droite $\Delta : y = x + 5$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$, car :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+5) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 5 + \ln\left(\frac{x}{x+3} \right) - x - 5 \right] = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+3} \right) = 0$$

3. Position de C_f par rapport à Δ :

$$\forall x \in I : \varphi(x) = f(x) - (x+5) = \ln\left(\frac{x}{x+3} \right) < 0 \qquad \left(\text{car } \frac{x}{x+3} < 1 \right)$$

C_f est donc en-dessous de Δ.

4. Calcul de $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + \frac{\cancel{(x+3)}(x+3-1)}{x(x+3)^{\cancel{2}}} = 1 + \frac{(x+2)}{\underbrace{x(x+3)}_{>0 \text{ sur I}}} > 0$$

T.V. de f sur I.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Représentation graphique