Mai 2008

I 2. $f(x)=\cos^4(7x-9)\Rightarrow f'(x)=4\cos^3(7x-9)\left[-\sin(7x-9)\right]\cdot 7$

$$=-28\cos^3(7x-9)\sin(7x-9)$$

II) 2. a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$

C.E. 1. $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$

2. $\dfrac{x}{x-2}>0\Leftrightarrow x<0 \text{ ou } x>2.$

$D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

b) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right)}\right)=0$$ A.H. $y=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln\underbrace{\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 0^-}}{\underbrace{x-2}_{\to -2}}\right)}_{\to 0^+}=-\infty$$ A.V. $x=0$ dans un voisinage de 0^-

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\ln\underbrace{\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 2}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}}\right)}_{\to +\infty}=+\infty$$ A.V. $x=2$ dans un voisinage de 2^+

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right)}\right)=0$$ A.H. $y=0$

c) $$f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\cancel{(x-2)}\left(\cancel{x}-2-\cancel{x}\right)}{x(x-2)^{\cancel{2}}}=\frac{-2}{\underbrace{x(x-2)}_{>0}}<0$$

Tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$		$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\|$ $-\infty$		$+\infty$ $\|$	$\searrow$	0

d)

Sur $I =]-\infty;0[$, f est strictement $\downarrow$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

L'équation $f(x) = 1$ n'admet donc pas de solution sur I.

Sur $J =]2;+\infty[$, f est strictement $\downarrow$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

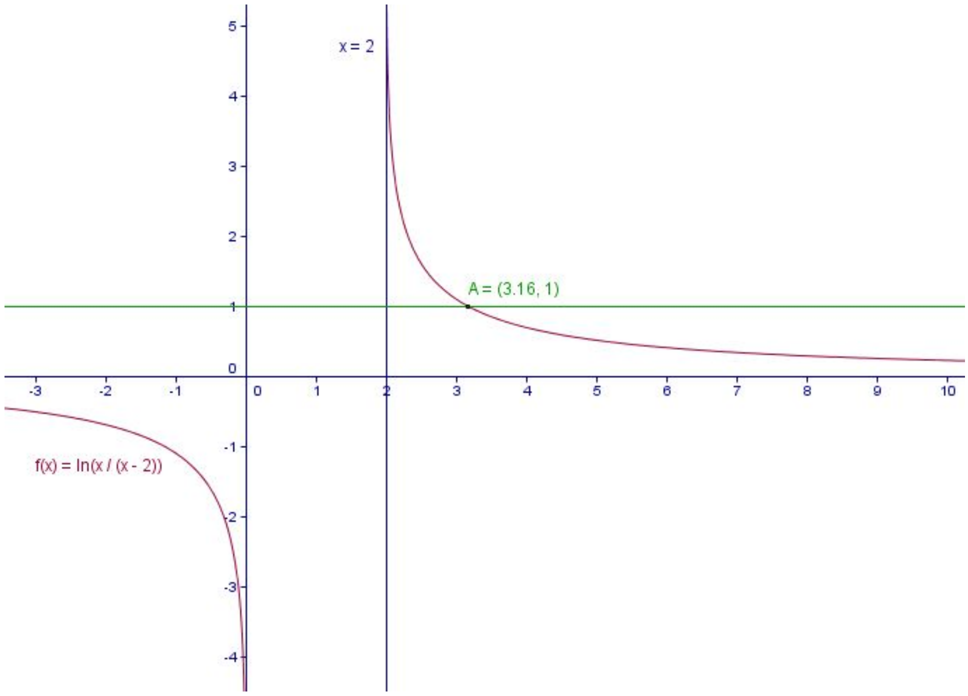
$f(J) =]0;+\infty[$ et toutes les valeurs de $]0;+\infty[$ sont atteintes exactement une fois.

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution unique sur J.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = \ln e \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2} = e$ car la fonction ln est strictement $\uparrow$.

$\Leftrightarrow x = ex - 2e \Leftrightarrow x - ex = -2e \Leftrightarrow x(1-e) = -2e \Leftrightarrow x = \dfrac{2e}{e-1} \approx 3,164$

e)



18 points (3+2+3+3+4+3)

III. a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\to+\infty}\right] = "-\infty+\infty" \qquad \text{f.i.}$$

$$f(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)}{x-\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\cancel{x^2} \cancel{-x^2} + 2x}{x-\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}} = 1$$

A.H. d'équation $y = 1$ dans un voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\to+\infty}\right]="+\infty+\infty"=+\infty.$$

C admet un A.O. d'équation $y=2x-1$ dans un voisinage de $+\infty$ ssi

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=0$$

$$f(x)-y=x+\sqrt{x^2-2x}-2x+1=\sqrt{x^2-2x}-x+1$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+(x-1)\right)}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}=\frac{\cancel{x^2}\cancel{-2x}\cancel{-x^2}\cancel{+2x}-1}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\to+\infty}+\underbrace{(x-1)}_{\to+\infty}}="\frac{-1}{+\infty}"=0$$

A.O. d'équation $y=2x-1$ dans un voisinage de $+\infty$

c)

$$\delta(x)=f(x)-y=\frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{>0}+\underbrace{(x-1)}_{>0\text{ sur }]2;+\infty[}}<0\quad\text{sur }]2;+\infty[\text{ C est en-dessous de d}$$

f est dérivable en 0 ssi $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a\quad(a\in\mathbb{R})$

d)

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+\sqrt{x^2-2x}-0}{x}=\frac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{\cancel{x}}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\left(1-\overbrace{\sqrt{1-\frac{2}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}}}^{\to+\infty}\right)=-\infty$$

f n'est pas dérivable en 0; C admet une tangente verticale d'équation $x=2$ au point $O(0;0)$

IV. 1.

$$f(x)=\frac{1+e^{-x}}{1-e^x}=\frac{\frac{e^x+1}{e^x}}{1-e^x}=\frac{e^x+1}{e^x\left(1-e^x\right)}$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\overbrace{e^x+1}^{\to2}}{\underbrace{e^x}_{\to1}\left(\underbrace{1-e^x}_{\to0^-}\right)}="\frac{2}{0^-}"=-\infty$ A.V. d'équation $x=0$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(1+\overbrace{\frac{1}{e^x}}^{\to0}\right)}{\cancel{e^x}\left(\underbrace{1-e^x}_{\to-\infty}\right)}="\frac{1}{-\infty}"=0$ A.H. d'équation $y=0$

b)

$$f(x)=\frac{1+e^{-x}}{1-e^{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-e^{-x}\left(1-e^{x}\right)+e^{x}\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1-e^{x}\right)^{2}}=\frac{-e^{-x}+1+e^{x}+1}{\left(1-e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}-e^{-x}+2}{\underbrace{\left(1-e^{x}\right)^{2}}_{>0}}$$

$f'(x)$ a le signe de $e^{x}-e^{-x}+2$

$e^{x}-e^{-x}+2=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1+2e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}+2e^{x}-1=0$

$e^{x}=y \Rightarrow y>0$

$y^{2}+2y-1=0 \qquad y=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(-1\pm\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}\left\langle\begin{array}{l} y_{1}=-1-\sqrt{2} \quad <0 \text{ (à écarter)} \\ y_{2}=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

$e^{x}=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\approx -0,88 \notin I$

Sur I, $f'(x)>0$

Tableau :

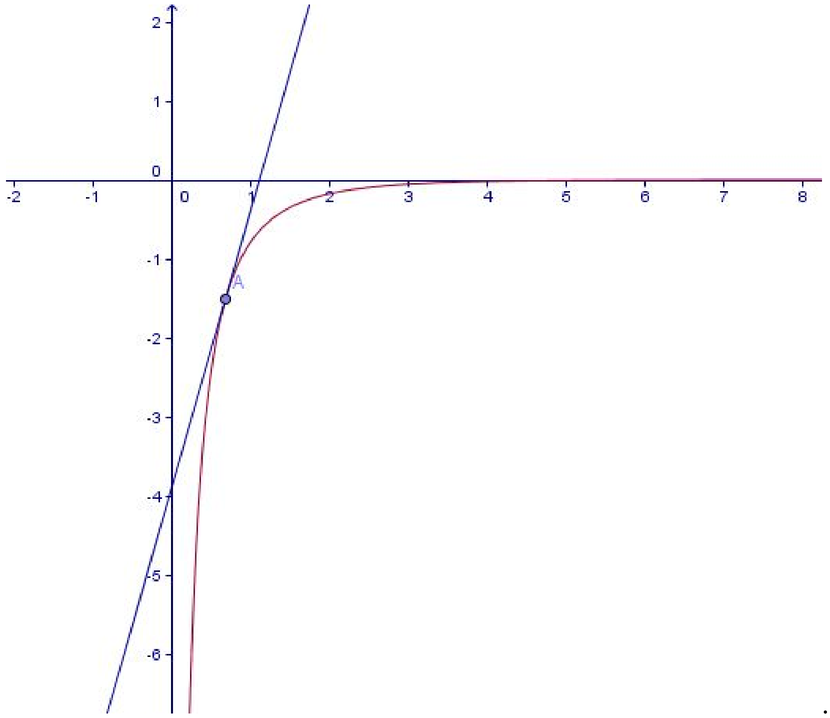
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

c)

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2)$

$f'(\ln 2)=\frac{2-\frac{1}{2}+2}{(1-2)^{2}}=\frac{7}{2} \qquad f(\ln 2)=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-2}=-\frac{3}{2}$

$y=\frac{7}{2}(x-\ln 2)-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}x-\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$



.13 points (4+6+3)

V)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4 - e^x\right) = "+\infty-\infty" \text{f.i.}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^x}_{\to+\infty}\overbrace{\left(\underbrace{x^4e^{-x}}_{\to 0}-1\right)}^{\to -1}\right] = -\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[x^3\left(\ln x - x^2\right)\right] = "0\cdot(-\infty)"$ f.i.

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to 0} x^5}_{=0} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{x^3}^{\to 0}}{\underbrace{e^x-1}_{\to 0}} = "\dfrac{0}{0}"$ f.i.

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{x}{e^x-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{x^2}_{\to 0}\right) = 0$$

$$\left(g(x) = \frac{x}{e^x-1} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)} = 1\right)$$

6 points (2+2+2)