1
08   GE/GI

CORRIGÉ MODÈLE

I) 1. voir livre page 64   2. $f'(x) = -28 \sin(7x-9)\cdot\cos^3(7x-9)$

II) 1. voir livre page 126

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

a) il faut $x-2 \neq 0$ et $\frac{x}{x-2} > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$D =]-\infty;0[\ \cup\ ]2;+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{x}{x-2}}_{\to 1}\right) = 0$ A.H. : $y=0$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)^{\to 0^-} = -\infty$ ($x-2 \to -2$)   A.V. : $x=0$

$\lim\limits_{x\to 2} \ln\left(\frac{\overset{\to 2}{x}}{\underset{\to 0^+}{x-2}}\right) = +\infty$ A.V. : $x=2$

c) $\forall x \in D$: $f'(x) = \frac{x-2}{x}\cdot\frac{-2}{(x-2)^2} = \frac{\overset{<0}{-2}}{\underset{>0}{x(x-2)}} < 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$		$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

d) • f dérivable donc continue sur $]2;+\infty[$

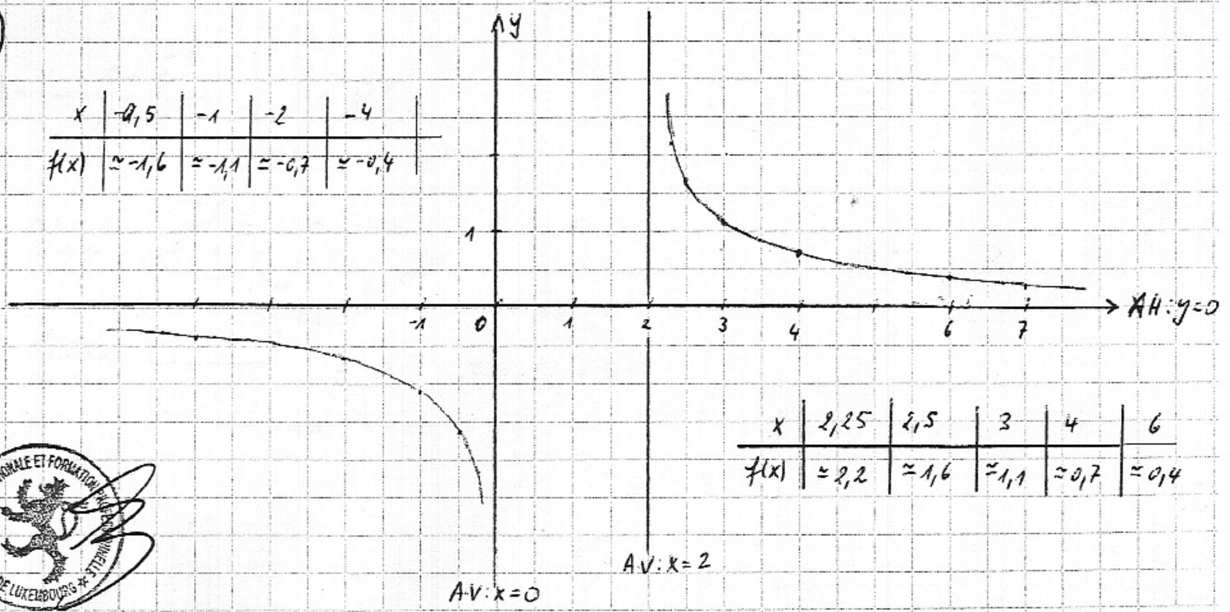
• f strictement décroissante sur $]2;+\infty[$

• $1 \in]0;+\infty[$

donc $f(x) = 1$ admet une et une seule solution dans $]2;+\infty[$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = e \Leftrightarrow x = \frac{2e}{e-1}$

e)



x	$-0,5$	-1	-2	-4
$f(x)$	$\simeq -1,6$	$\simeq -1,1$	$\simeq -0,7$	$\simeq -0,4$

x	$2,25$	$2,5$	3	4	6
$f(x)$	$\simeq 2,2$	$\simeq 1,6$	$\simeq 1,1$	$\simeq 0,7$	$\simeq 0,4$

III) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\overset{\to -\infty}{x} + \overset{\to +\infty}{\sqrt{x^2-2x}}\right) = f.i = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 - \underset{\to 0}{\frac{2}{x}}}\right)} = 1$ A.H. : $y = 1$ en $-\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\overset{\to +\infty}{x} + \overset{\to +\infty}{\sqrt{x^2-2x}}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\overset{\to +\infty}{\sqrt{x^2-2x}} + 1 \overset{\to -\infty}{- x}\right) = f.i$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\underset{\to +\infty}{\sqrt{x^2-2x}} - 1 \underset{\to +\infty}{+ x}} = 0$

donc $d : y = 2x - 1$ est A.O. à C en $+\infty$

c) Il faut étudier le signe de $\sqrt{x^2-2x} + 1 - x$ pour $x \in [2 ; +\infty[$

posons: $\sqrt{x^2-2x} + 1 - x = 0 \iff \underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{>0} = \underbrace{x-1}_{>0}$

$\iff x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1$

$\Rightarrow 0 = 1$ donc impossible

sur $[2 ; +\infty[$, $(\sqrt{x^2-2x} + 1 - x)$ garde un signe constant.

si $x = 3$: $\sqrt{3} + 1 - 3 = \sqrt{3} - 2 < 0$

donc $\forall x \in [2 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2-2x} + 1 - x < 0$ et d / C.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}\left(1 - \sqrt{1 - \overset{\to -\infty}{\frac{2}{x}}}\right)}{\cancel{x}} = -\infty$

f n'est pas dérivable en $x = 0$. C admet en $x = 0$ une tangente verticale.

IV) $f(x) = \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{x}}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \overset{\to 1}{e^{-x}}}{\underset{\to 0^-}{1 - e^{x}}} = -\infty$ A.V : $x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \overset{\to 0}{e^{-x}}}{\underset{\to -\infty}{1 - e^{x}}} = 0$ A.H. : $y = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad f'(x) = \dfrac{-e^{-x}+e^{x}+2}{\underbrace{(1-e^{x})^2}_{>0}}$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-e^{-x}+e^{x}+2$.

posons $\quad -e^{-x}+e^{x}+2=0 \quad | \cdot e^{x}$

$e^{2x}+2e^{x}-1=0 \quad$ posons $y=e^{x}>0$

$y^2+2y-1=0 \; , \; \Delta = 8 \; , \; y_1 = -1-\sqrt{2} < 0$ à rejeter

$y_2 = -1+\sqrt{2} > 0$

$e^{x} = -1+\sqrt{2}$

$x = \ln(-1+\sqrt{2}) \simeq -0{,}88 \notin \mathbb{R}_+^*$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\| -\infty$	$\nearrow$	0

c) $T : y = f(\ln 2) + f'(\ln 2)\cdot(x-\ln 2)$

$f(\ln 2) = \dfrac{1+e^{-\ln 2}}{1-e^{\ln 2}} = \dfrac{3/2}{-1} = -3/2$

$f'(\ln 2) = \dfrac{-e^{-\ln 2}+e^{\ln 2}+2}{(1-e^{\ln 2})^2} = \dfrac{7/2}{1} = \dfrac{7}{2}$ $\qquad T : y = \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}$

V) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{x^4}_{\to+\infty} - \underbrace{e^{x}}_{\to+\infty}) = \text{fi}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{e^{x}}{x^4}}_{\to+\infty}\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^3}_{\to 0}\underbrace{(\underbrace{\ln x}_{\to-\infty} - \underbrace{x^2}_{\to 0})}_{\to-\infty} = \text{fi}$

$= \lim\limits_{x\to 0} (\underbrace{x^3\ln x}_{\to 0} - \underbrace{x^5}_{\to 0}) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{x^3}^{\to 0}}{\underbrace{e^{x}-1}_{\to 0}} = \text{fi}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{e^{x}-1}}_{\to 1} = 0$