

EPREUVE ÉCRITE

Ministère de l'Éducation nationale
et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Division technique générale

Section GE

BRANCHE : Mathématiques I

SESSION : *mai-juin 2007* DATE : *24 mai 2007* DURÉE 2h15

Exercice 1 9 points (6+3)

1) Démontrez : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2) Démontrez : Pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 2 12 points (1+3+3+3+2)

f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

C_f est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Calculez la limite de f en $+\infty$.

2) Prouvez que la droite d d'équation $y = 3x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

3) Étudiez la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire graphiquement ?

4) Calculez $f'(x)$ pour x dans $]1; +\infty[$ et dressez le tableau de variations de f .

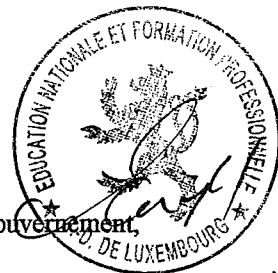
5) Tracez la courbe C_f .

Exercice 3 12 points (4+6+2)

1) Résolvez l'équation $2 \ln x - \ln 5 = \ln(x+2)$.

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x}$. Étudiez le signe de $f'(x)$.

3) Résolvez l'équation différentielle $3y' - 12y = 0$ et déterminez-en la solution f telle que $f(1) = e^4$.



Exercice 4 15 points (3+0,5+1+2,5+3+2+3)

1) g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x + 3 + 2x \ln x$.

- Dressez le tableau de variations de g . (les limites ne sont pas demandées)
- Calculez les coordonnées de l'extremum.
- Déduisez-en le signe de $g(x)$.

2) f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (2x + 3) \ln x$.

- Calculez les limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$ et indiquez les équations des asymptotes éventuelles parallèles aux axes.
- Vérifiez que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et dressez le tableau de variations de f .
- Montrez que l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$.
Trouvez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de cette solution.
- Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Exercice 5 7 points (1+3+2+1)

On note f la fonction définie par $f(x) = 3x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}$ et C_f sa courbe représentative

dans un repère orthonormal. Justifiez chacune des affirmations suivantes :

- f est définie sur \mathbb{R}^* ,
- f est une fonction impaire,
- la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_f ,
- la droite d'équation $y = 3x - \frac{1}{2}$ est asymptote à C_f .

Exercice 6 5 points

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - 2}$ avec a et b réels. On note

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Trouvez les réels a et b tels que :

- C_f passe par le point $A(1; -3)$
- C_f admet au point d'abscisse 1 une tangente de pente 2.

