Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2005

BRANCHE : ***MATHÉMATIQUES II***

DATE : 07/06/05 *DURÉE :* 2 h 15

QUESTION 1 (2+4+4=10 points)

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

a) Démontrer que pour tout entier n non nul, $u_n > 0$.

b) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n). En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

QUESTION 2 (4+4+5=13 points)

a) Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormal du plan. En posant $z = x + iy$ avec x et y réels, déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ dont l'affixe vérifie la condition :

$(\overline{z} - 3)\cdot(iz + 2)$ est réel.

b) Écrire le nombre complexe $z_1 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

c) Linéariser l'expression : $\cos^3 x \sin x$.

QUESTION 3 (3+2+2+2=9 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + \frac{3}{4}i$, $z_B = 2 - \frac{5}{4}i$ et $z_C = 3 + \frac{7}{4}i$.

a) Placer les points A, B et C. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) En déduire les longueurs AB, AC et BC.
c) Quelle est la nature du triangle ABC ?
d) Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC.

Le Commissaire du Gouvernement,

QUESTION 4 (4 points)

Démontrer le théorème :

A, *B*, *C*, *D* sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D, tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Alors : $$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

QUESTION 5 (7+7=14 points)

a) On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)^2}$.

Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2}$ où *a*, *b*, *c* sont des nombres réels.

Calculer $\int_1^4 f(x)\,dx$.

b) Calculer l'intégrale suivante :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x)\,dx$ (Suggestion : faire une double intégration par parties)

QUESTION 6 (7 points)

Démontrer le théorème suivant :

Dans un repère orthonormal, tout plan *P* a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où *a*, *b*, *c* ne sont pas tous nuls. De plus, le vecteur non nul $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à *P*.

QUESTION 7 (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A(-2;3;-1)$ et $B(3;0;-2)$ et le vecteur $\vec{n}(2;-1;5)$.

Soit *P* le plan passant par le point *A* et de vecteur normal $\vec{n}$. Déterminer une équation cartésienne du plan *Q* passant par *B* et parallèle au plan *P*.