Juin 2004

Ministère de l'Education nationale, de la Formation professionnelle et des Sports

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale – Section technique générale

Session 2004

BRANCHE : MATHEMATIQUES II

DATE : 14.06.04 *DUREE : 2h15*

I. (5 + 2 + 3 = 10 points)

(u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad v_n = 4 - 6u_n$$

1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
   Exprimer v_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (v_n).
2) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) On note $s_n = v_0 + ... + v_n$.
   Exprimer s_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite (s_n).

II. (5 points)

Démontrer le théorème: Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$ et 2. $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$

III. (5 + 3 + 2 = 10 points)

On considère les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = z_1 \cdot z_2$.

1) Ecrire z_1 et z sous forme exponentielle.
2) Ecrire z_2 et z sous forme algébrique.
3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

IV. (2 + 10 = 12 points)

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan.

A, B, C sont les points d'affixes respectives : $a = -2 - \frac{1}{2}i$, $b = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $c = 1 - 2i$.

1) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Vérifier de deux façons différentes que ABC est un triangle rectangle et isocèle :
   a) en calculant les longueurs AB, AC et BC.
   b) en calculant $\frac{c-a}{b-a}$.

Le commissaire du Gouvernement,

EDUCATION NATIONALE, FORMATION PROFESSIONNELLE ET SPORTS * G.D. DE LUXEMBOURG *

V. (5 points)

Démontrer le théorème :

f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive quelconque de f sur I, a et b sont deux réels de I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

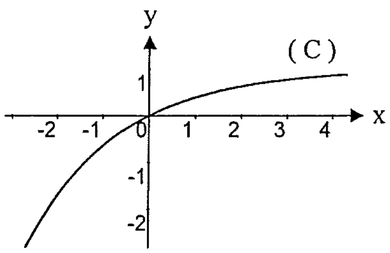
VI. (5 + 4 = 9 points)

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$.

   Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(\frac{2\pi}{3}) = \frac{7}{3}$ sur un intervalle I à préciser.

2) La courbe (C) d'équation $y = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ est tracée ci-contre.

   Calculer, en u.a., l'aire du domaine compris entre (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.



VII. (4 + 4 + 1 = 9 points)

On considère les intégrales : $I = \int_1^e (2x-1)\ln x\,dx$ et $J = \int_1^e \dfrac{(x-1)(2x+1)\ln x}{x}\,dx$

1) Calculer I.
2) Calculer $I - J$.
3) Déduire des questions précédentes la valeur de J.

Le commissaire du Gouvernement,

ÉDUCATION NATIONALE, FORMATION PROFESSIONNELLE ET SPORTS * G.D. DE LUXEMBOURG *