

BRANCHE : Mathématiques I

DATE : 27.05.04

DUREE : 2 h 15 min

I (6 + 4 = 10 points)

1) Démontrer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2) Démontrer : La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa fonction dérivée : $(\exp)' = \exp$.

II (4 + 4 = 8 points)

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 0] \cup [7 ; +\infty [$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$
 Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1) Démontrer que C_f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ dont on déterminera une équation.
- 2) Démontrer que C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

III (5 + 3 = 8 points)

Soit f la fonction définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = x \cdot (a \ln x + b e^{-x})$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
 Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
 La tangente à C_f au point $A(1 ; 2)$ est parallèle à la droite d d'équation $x + y = 0$.

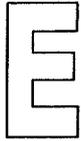
- 1) Déterminer les réels a et b .
- 2) Est-ce que C_f admet des asymptotes parallèles aux axes du repère ? Justifier.

IV (4 + 4 = 8 points)

Résoudre:

- 1) $2 \cdot \ln(2 - 3x) = \ln(4x + 8) + \ln(5 - 4x)$
- 2) $2e^x + e^{-x} \leq 3$





V (1 + 3 + 5 + 6 + 3 = 18 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{4}x + \ln(2-x) - \ln(5-x)$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
- 2) Déterminer les limites aux bornes du domaine et préciser les asymptotes (éventuelles) parallèles aux axes du repère.
- 3) a) Démontrer que C_f admet une asymptote oblique d dont on déterminera une équation.
b) Étudier la position de C_f par rapport à d .
- 4) Étudier les variations de f .
- 5) Construire C_f et ses asymptotes (unité: 1 cm).

VI (3 + 3 + 2 = 8 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} - x$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1) Étudier les variations de f .
- 2) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
- 3) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans \mathbb{R} .
Trouver un encadrement de α à un dixième près.