EPREUVE ECRITE

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle et des Sports

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Division technique générale

Branche : **MATHEMATIQUES II**

Date : septembre 2003 Durée : 2h15

I. (4 + 4 = 8 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\sin^4 x$.

1) Linéariser $f(x)$.

2) Déterminer la primitive F de f sur ℝ qui vérifie $F(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{4}$.

II. (5 + 7 = 12 points)

1) Démontrer le théorème :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' : $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$ (modulo 2π)

2) Soient $z=-\sqrt{3}+i$, $z'=4-4i$ et $u=zz'$.

Sans déterminer la forme algébrique de u, déterminer le module et un argument de u.

III. (2 + 6 = 8 points)

Soient $a=-2-3i$, $b=-4+5i$, $c=-\frac{3}{2}-5i$.

1) Déterminer la forme algébrique de $z=\dfrac{a^2\cdot(b-c)}{5i}$.

2) Dans le repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

a) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$ et en déduire que les points A, B et C sont alignés.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que AOBD soit un parallélogramme.

IV. (4 + 4 = 8 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=e^x\cos x$.

1) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x)=\frac{1}{2}f''(x)+f(x)$.

2) Déduire de 1) la valeur de $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$.

Le commissaire du Gouvernement,

V. (5 + 3 = 8 points)

1) Démontrer le théorème :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un réel de I.

La fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

2) Déterminer la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, nulle en $\frac{\pi}{3}$, de la fonction $f : t \mapsto \tan t$.

VI. (7 points)

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_1^e t^n \ln t\,dt$.

A l'aide d'une intégration par parties, vérifier que pour tout n : $I_n = \dfrac{1+ne^{n+1}}{(n+1)^2}$.

En déduire les valeurs de $J = \int_1^e \ln t\,dt$ et $K = \int_1^e t^9 \ln t\,dt$.

VII. (5 + 4 = 9 points)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

Soient $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{k}$ et $\vec{a}(-1;0;4)$.

1) Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux, puis déterminer $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base orthonormale directe.

2) Calculer la mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{a})$.

Le commissaire du Gouvernement,