13CG – Mathématiques - 2015-2016 - Corrigé

Exercice 1 (2+3+3+2=10 points)

1) $B(x)=P(x)-C(x)=870x-x^2-100x-15000=-x^2+770x-15000$

2) $B(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+770x-15000>0$ $\quad \Delta=532900 \quad x_1=750 \quad x_2=20$

x	$-\infty$		20		750		$+\infty$
$-x^2+770x-15000$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le bénéfice est strictement positif pour les toutes les valeurs $x\in\left]20;750\right[$.

3) $B'(x)=-2x+770 \qquad B'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+770=0 \Leftrightarrow x=385$

x	$-\infty$	0	20	385	750	$+\infty$
$-2x+770$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$B(x)$		$\nearrow$		133225	$\searrow$	

4) $B(385)=-385^2+770\cdot385-15000=133225$

Le bénéfice maximal pour 385 receveurs de douches fabriqués et vendus est 133225 €.

Exercice 2 (6+4=10 points)

1) $\ln(x-2)-\ln 15\le \ln 3-\ln(x+2)$ $\qquad$ C.E. : $x>2$ et $x>-2$ $\qquad D=\left]2;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow \ln(x-2)+\ln(x+2)\le \ln 15+\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln\left[(x-2)(x+2)\right]\le \ln 45$

$\Leftrightarrow x^2-49\le 0$

x	$-\infty$		-7		7		$+\infty$
x^2-49		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]2;7\right]$

2) $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}}\ge e^x\cdot e^2 \qquad D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-3x\ge x+2 \qquad \Delta=24 \qquad x_1=2-\sqrt{6} \qquad x_2=2+\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow x^2-4x-2\ge 0$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-4x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty;2-\sqrt{6}\right]\cup\left[2+\sqrt{6};+\infty\right[$

Exercice 3 (1+3+3+1=8 points)

1) $f(x) = 8 - 2\ln\left(\frac{1}{2} - 3x\right)$ C.E. : $\frac{1}{2} - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6}$ $D_f = \left]-\infty ; \frac{1}{6}\right[$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[8 - 2\underbrace{\ln\left(\frac{1}{2} - 3x\right)}_{\to +\infty} \right] = -\infty$ Pas d'asymptote.

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{6}\right)^-} \left[8 - 2\underbrace{\ln\left(\frac{1}{2} - 3x\right)}_{\to -\infty} \right] = +\infty$ Asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{6}$.

3) $f'(x) = \dfrac{6}{\frac{1}{2} - 3x} > 0$ pour tout $x \in D_f$ et f' ne s'annule pas sur $D_f = \left]-\infty ; \frac{1}{6}\right[$

Tableau des variations

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

4) Intersection avec l'axe des ordonnées :

$C_f \cap (Oy)$: $f(0) = 8 - 2 \cdot \ln\frac{1}{2} \approx 9,39$ Donc : $C_f \cap (Oy) = \left\{ I\left(0 ; 8 - 2 \cdot \ln\frac{1}{2}\right) \right\}$

Exercice 4 (2+3=5 points)

1) C.E. $2 - e^{-3x} \neq 0 \Leftrightarrow 2 \neq e^{-3x} \Leftrightarrow \ln 2 \neq -3x \Leftrightarrow x \neq -\frac{\ln 2}{3}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\ln 2}{3} \right\}$

2) $f'(x) = \dfrac{-2e^{-2x} \cdot \left(2 - e^{-3x}\right) - \left(e^{-2x} - 1\right) \cdot 3e^{-3x}}{\left(2 - e^{-3x}\right)^2}$

$= \dfrac{-4e^{-2x} + 2xe^{-5x} - 3e^{-5x} + 3e^{-3x}}{\left(2 - e^{-3x}\right)^2}$

$= \dfrac{-4e^{-2x} - e^{-5x} + 3e^{-3x}}{\left(2 - e^{-3x}\right)^2}$

Exercice 5 (1+3+2=6 points)

1) $g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+6x-2=0 \qquad \Delta=28 \qquad x_1=3+\sqrt{7} \qquad x_2=3-\sqrt{7}$

   Les coordonnées du point I sont $\left(3+\sqrt{7};0\right)$.

2) $\forall x\in\left]2;+\infty\right[: h'(x)=-1+\dfrac{6}{(x-2)^2}+\dfrac{2}{x-2}$

$$=\frac{-x^2+4x-4+6+2x-4}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{-x^2+6x-2}{(x-2)^2}$$

Donc h est une primitive de g.

$$=g(x)$$

3) $\displaystyle\int_4^{3+\sqrt{7}} g(x)\,dx=\left[h(x)\right]_4^{3+\sqrt{7}}$

$$=\left[-x-\frac{6}{x-2}+2\ln(x-2)\right]_4^{3+\sqrt{7}}$$

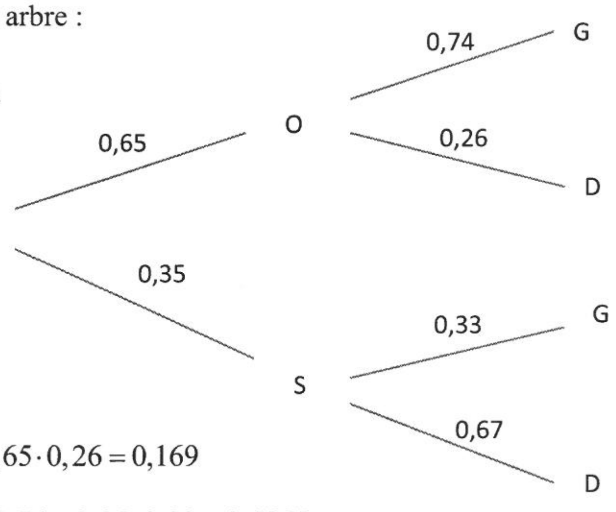
$$=-3-\sqrt{7}-\frac{6}{1+\sqrt{7}}+2\ln\left(1+\sqrt{7}\right)+4+3-2\ln 2$$

$$=4-\sqrt{7}-\frac{6}{1+\sqrt{7}}+2\ln\left(1+\sqrt{7}\right)-2\ln 2$$

$$\approx 0{,}909 \text{ u.a.}$$

Exercice 6 (2+1+1+2=6 points)

1) Diagramme en arbre :
   O : opposants
   S : supporteurs



2) $p(O\cap D)=0{,}65\cdot 0{,}26=0{,}169$

3) $p(G)=0{,}65\cdot 0{,}74+0{,}35\cdot 0{,}33=0{,}5965$

4) $p(O|G)=\dfrac{p(O\cap G)}{p(G)}=\dfrac{0{,}65\cdot 0{,}74}{0{,}65\cdot 0{,}74+0{,}35\cdot 0{,}33}=\dfrac{962}{1193}\approx 0{,}8064$ soit $80{,}64\%$

Exercice 7 (2+2=4 points)

1) G = « le professeur interroge un garçon » F = « le professeur interroge une fille »

$p = 0,8 \quad q = 0,2 \qquad p(G = 7) = C_{10}^{7} \cdot 0,8^{7} \cdot 0,2^{3} \approx 0,2013$

2) $p(F \geq 2) = 1 - p(F = 0) - p(F = 1) = 1 - C_{10}^{0} \cdot 0,8^{10} \cdot 0,2^{0} - C_{10}^{1} \cdot 0,8^{9} \cdot 0,2^{1} \approx 0,6242$

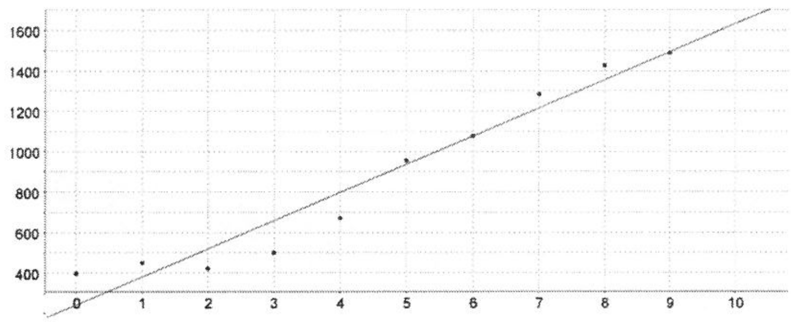
Exercice 8 ((1+1+1+2+1)+(1+1+1+1+1)=11 points)

Partie A

1) $G(4,5\,;\,868,1)$

2) $r \approx 0,973$ Comme $0,7 < |r| \leq 1$, un ajustement affine est valable.

3) Représentation graphique du nuage des points



4) Equation de la droite de régression : $y = 139,279 \cdot x + 241,345$.

x	0	4,5	6
y	241,345	868,1	1077,019

5) En 2025, $x = 20$: $y = 139,279 \cdot 20 + 241,345 \approx 3026,925$

Une prévision pour le budget en 2025 ($x = 20$) est environ 3027 millions d'euros.

Partie B

1) $z_i = ln\, x_i$

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014
z_i	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079	2,197
Budget y_i	673	956	1077	1285	1427	1490

2) Equation de la droite de régression : $y = 1020,514 \cdot z - 721,139$.

3) $z = \ln x$: $y = 1020,514 \cdot \ln x - 721,139$

4) $x = 20$: $y = 1020,514 \cdot \ln 20 - 721,139 \approx 2336,048$

Une prévision pour le budget en 2025 est environ 2336 millions d'euros.

5) Comme l'entreprise souhaite envisager un budget de 2300 millions d'euros en 2025, l'ajustement logarithmique semble être plus réaliste.