Corrigé

12 JUIN 2017

Exercice 1 : (3 points)

(1) C_1

(2) tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

rem. : accepter toute autre justification valable

Exercice 2 : (4 points)

(0,5) S : « le feu est vert » $p = 0.3$
$\bar{S}$: « le feu est rouge » $q = \bar{p} = 1 - 0.3 = 0.7$

(1) a) $p(S_5 = 5) = C_5^5 \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^0 = 0.00243$

(1) b) $p(S_5 = 4) = C_5^4 \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^1 = 0.02835$

(1.5) c) $p(S_5 \geq 2)$
$= 1 - p(S_5 = 0) - p(S_5 = 1)$
$= 1 - C_5^0 \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^5 - C_5^1 \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^4$
$= 1 - 0.16807 - 0.36015$
$= 0.47178$

Exercice 3 : (4 points)

(1) On choisit 3 billets parmi 50 billets
Cas possibles : $C_{50}^3 = 19600$

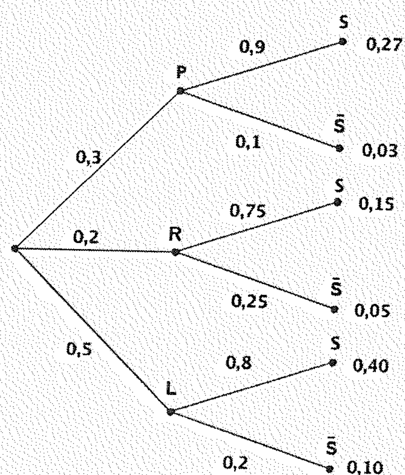
(1) a) $p(\textit{tous les billets sont gagnants})$
$= \frac{C_{10}^3 \cdot C_{40}^0}{C_{50}^3} = \frac{120}{19600} \simeq 0.0061$

(1) b) $p(1 \textit{ fois chaque gain})$
$= \frac{C_6^1 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1 \cdot C_{40}^0}{C_{50}^3} = \frac{18}{19600} \simeq 0.0009$

(1) c) $p(\textit{au moins un billet gagnant})$
$= 1 - \frac{C_{10}^0 \cdot C_{40}^3}{C_{50}^3} = 1 - \frac{9880}{19600} \simeq 0.4959$

Exercice 4 : (6 points)

(2) a) P : Paris R :Rome L :Londres S : satisfait



(1) b) $p(R\ et\ \bar{S}) = 0.2 \cdot 0.25 = 0.05$

(1) c) $p(S) = 0.3 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.8 = 0.27 + 0.15 + 0.40 = 0.82$

(2) d) $p(P/\bar{S}) = \frac{p(P\ et\ \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{1-0.82} \simeq 0.1667$

Exercice 5 : (8 points)

(1) a) recette : $R(x) = \frac{420 \cdot x \cdot 100}{1000} = 42x$

(1) b) bénéfice : $B(x) = R(x) - C(x) = 42x - \left(70x - x^2 - 176 - 32\ln\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\right)$

$= 42x - 70x + x^2 + 176 + 32\ln\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = x^2 - 28x + 176 + 32\ln\left(\frac{1}{2}x - 2\right)$

(1) c) dérivée :

$B'(x) = 2x - 28 + 32 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}x - 2} \cdot \frac{1}{2} = 2x - 28 + \frac{32}{x-4} = \frac{2x^2 - 36x + 144}{x-4}$

(3) tableau de variation :

$2x^2 - 36x + 144 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \ \ ou \ \ x = 12 \qquad (\Delta = 36)$

x	$-\infty$	4		4.5		6		12		14	$+\infty$
$2x^2 - 36x + 144$	+				+	0	−	0	+		
$x - 4$	−	0			+		+		+		
$B'(x)$					+		−		+		
$B(x)$					↗	44	↘		↗	31.5	

(2) d) $B(6) = 44$; $B(14) \simeq 31.5$
bénéfice maximal pour 600 tables produites et vendues.
bénéfice correspondant : $B(6) = 44 \rightarrow 44000$ €

Exercice 6 : (4 points)

$$\boxed{(e^{2-x}\cdot e^{3-x}+2)\cdot\left(\frac{e^{10+3x}}{e^{x^2}}-1\right)=0}$$

(0.5) domaine : $D=\mathbb{R}$

résolution :

(1) $e^{2-x}\cdot e^{3-x}+2=0$

$e^{2-x+3-x}=-2$

$impossible$

(2) $\frac{e^{10+3x}}{e^{x^2}}-1=0$

$e^{10+3x-x^2}=e^{\ln 1}$

$-x^2+3x+10=0$ $\quad\Delta=9-4\cdot(-1)\cdot 10=49$

$x=-2\ \in D\ ou\ \ x=5\in D$

(0.5) $S=\{-2\,,5\}$

Exercice 7 : (6 points)

$$\boxed{2\ln(x+2)-\ln(2x-1)\geq\ln(3x-4)}$$

(1.5) domaine :

C.E. $\quad x+2>0$ et $2x-1>0$ et $3x-4>0$

$\quad x>-2 \qquad x>\frac{1}{2} \qquad x>\frac{4}{3}$

$D=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

(3) résolution :

$\ln(x+2)^2\geq\ln(2x-1)+\ln(3x-4)$

$\ln[x^2+4x+4]\geq\ln[6x^2-3x-8x+4]$

$x^2+4x+4\geq 6x^2-3x-8x+4$

$-5x^2+15x\geq 0$

$\Delta=225-4\cdot(-5)\cdot 0)=225$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm15}{-10}$

$x=0$ ou $x=3$

(1.5)

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-5x^2+15x$	$-$	0	$+$	0	$-$

$S=\left]\frac{4}{3};3\right]$

Exercice 8 : (5 points)

(2) a) points d'intersection avec l'axe des x :

$y=0$

$9-2x-\frac{4}{x}=0$

$\frac{-2x^2+9x-4}{x}=0$

$\Delta=81-4\cdot(-2)\cdot(-4)=49$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9\pm7}{-4}$

$x=\frac{1}{2}$ ou $x=4$

points d'intersection : $I_1\left(\frac{1}{2};0\right)$ et $I_2(4;0)$

(3) b) aire :

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{4}\left(9 - 2x - \frac{4}{x}\right)\,dx$$
$$= \left[9x - x^2 - 4\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{4}$$
$$= (36 - 16 - 4\ln(4)) - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{4} - 4\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$\left(= \frac{63}{4} - 12\ln(2)\right) \simeq 7.43$$

Exercice 9: (9 points)

$$\boxed{f(x) = 3 - 4e^{-2-\frac{1}{2}x}}$$

(0.5) a) <u>domaine:</u>

$$D_f = \mathbb{R}$$

(2) b) <u>limites et asymptotes :</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ $\quad$ $A.H.\!: y = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ pas d'$A.H.$

(2,5) c) <u>intersection avec les axes :</u>

axe des x :

$$y = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$3 - 4e^{-2-\frac{1}{2}x} = 0$$
$$-4e^{-2-\frac{1}{2}x} = -3$$
$$e^{-2-\frac{1}{2}x} = \frac{3}{4}$$
$$e^{-2-\frac{1}{2}x} = e^{\ln\frac{3}{4}}$$
$$-2 - \frac{1}{2}x = \ln\frac{3}{4}$$
$$x = -2\ln\frac{3}{4} - 4 \quad (\simeq -3{,}42)$$
$$I(-3{,}42\,;0)$$

axe des y :

$$x = 0$$
$$y = f(0)$$
$$y = 3 - 4e^{-2} \ (\simeq 2{,}46)$$
$$J(0\,;2{,}46)$$

(1) d) <u>dérivée :</u>

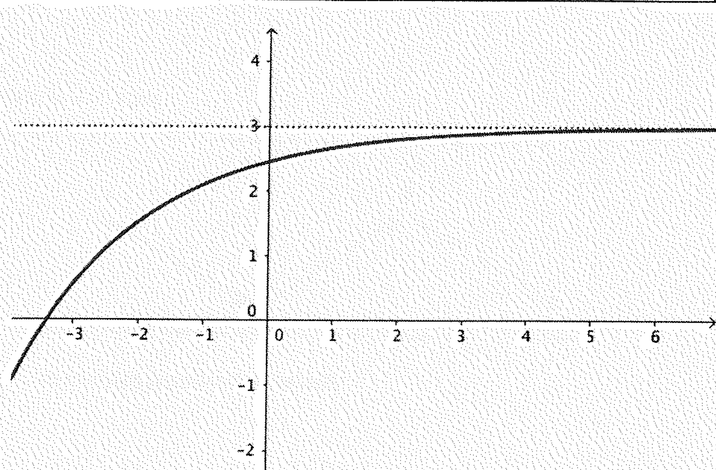
$$f'(x) = -4e^{-2-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-2-\frac{1}{2}x} > 0$$

(1) e) <u>tableau de variation :</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	3

(2) f) <u>représentation graphique :</u>

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3.59	-1	0.57	1.53	2.11	2.46	2.67	2.80	2.88



<u>Exercice 10 :</u> (5+6 = 11 points)

A) <u>Ajustement affine</u>

(1) a) G(3.5 ; 30.33)

(1) b) augmentation en % : $\frac{48.3-5.5}{5.5} \cdot 100 \simeq 778{,}18\%$

(2) c) $r \simeq 0.98$, $|r| > 0.7$ donc un ajustement affine est valable (1)
$d : y = 0.57 + 8.50x$ (1)

(1) d) 2018 : $x = 9 \rightarrow y \simeq 77.07 \rightarrow$ 77070 abonnements mobiles

B) <u>Ajustement non affine</u>

(1) a) tableau de $z = \ln(x)$

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année (x)	1	2	3	4	5	6
$z = \ln(x)$	0	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79
Nombre d'abonnements mobiles en milliers (y)	5,5	18,3	29,1	37,4	43,4	48,3

(1) b) droite de régression de y en z : $y = 3.71 + 24.27z$

(1) c) $y = 3.71 + 24.27 \ln x$

(1) d) 2018 : $x = 9 \rightarrow y \approx 57.04 \rightarrow$ 57040 abonnements mobiles

(2) e) 700000 abonnements mobiles : y=70

$3.71 + 24.27 \ln x > 70$

$24.27 \ln x > 70 - 3.71$

$\ln x > \frac{70-3.71}{24.27}$

$x > e^{\frac{70-3.71}{24.27}}$

$x > 15.35 \rightarrow 16 \rightarrow$ Année : 2025