07 JUIN 2016

# Corrigé 13 CG mathématiques

**Exercice 1 (11 points)**

$f(x)=4-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

Domaine de définition : $D_f=\mathbb{R}$ **(1)**

Limites et asymptotes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ $\quad A.H: y=4$ **(2)**

Dérivée : $f'(x)=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}x}>0$ **(1)**

Tableau de variation : **(2)**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ | 4 |

Intersection avec les axes : **(2+1)**

$C_f\cap(Ox)$ :

$f(x)=0\Rightarrow 4-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}=0\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{8}{3}\Rightarrow -\frac{1}{2}x=\ln\frac{8}{3}\Rightarrow x=-2\left(\ln\frac{8}{3}\right)\approx-1{,}96$

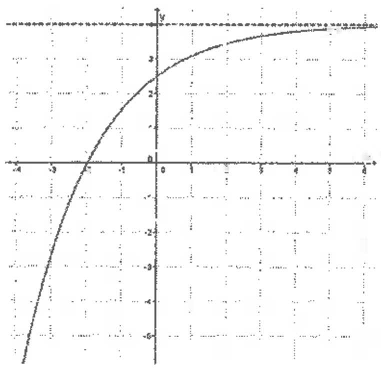
$\Rightarrow A(-1{,}96;0)$

$C_f\cap(Oy)$ :

$f(0)=4-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}=2{,}5\Rightarrow B(0;2{,}5)$

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -2,72 | -0,08 | 1,53 | 2,5 | 3,09 | 3,45 | 3,67 | 3,80 | 3,88 |

Représentation graphique : **(2)**



**Exercice 2(3+4=7 points)**

1. $f(x)=\ln\frac{3-7x}{2x-5}$

   $c.e: \frac{3-7x}{2x-5}>0$

   $D_f=\left]\frac{3}{7};\frac{5}{2}\right[$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{7}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3-7x$ | | + | 0 | − | | − | |
| $2x-5$ | | − | | − | 0 | + | |
| $\frac{3-7x}{2x-5}$ | | − | 0 | + | \|\| | − | |

2. $f'(x)=\dfrac{\frac{-7(2x-5)-(3-7x)2}{(2x-5)^2}}{\frac{3-7x}{2x-5}}=\frac{-14x+35-6+14x}{(2x-5)^2}\cdot\frac{2x-5}{3-7x}=\frac{29}{(2x-5)(3-7x)}$

**Exercice 3 (2+3=5 points)**

1. $B'(x)=2xe^{-0,2x}+x^2(-0,2)e^{-0,2x}=xe^{-0,2x}(-0,2x+2)$
2. $B'(x)=0 \Rightarrow xe^{-0,2x}(-0,2x+2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=10$

   Tableau de variation :

| $x$ | 0 | | 10 | | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | + | | + | |
| $e^{-0,2x}$ | | + | | + | |
| $-0,2x+2$ | | + | 0 | - | |
| $B'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $B(x)$ | | $\nearrow$ | 13,534 | $\searrow$ | |

Il faut fabriquer et vendre 10 tables pour obtenir un bénéfice maximal de 13534 euros

**Exercice 4 (6+3=9 points)**

1. $\ln(1-5x)-2\ln(1+x)\le 0$

   $c.e: \left.\begin{array}{l}1-5x>0 \Rightarrow x<\frac{1}{5}\\ 1+x>0 \quad \Rightarrow x>-1\end{array}\right\} D_I=\left]-1;\frac{1}{5}\right[$

   $\ln(1-5x)-2\ln(1+x)\le 0$

   $\ln(1-5x)\le\ln(1+x)^2$

   $1-5x\le 1+2x+x^2$

   $-x^2-7x\le 0$

   $v.c: -x^2-7x=0$

   $x(-x-7)=0$

   $x=0 \text{ ou } x=-7$

   $S=\left[0;\frac{1}{5}\right[$

| $x$ | $-\infty$ | | -7 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2-7x$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

2. $\left(e^{3x+1}\right)^2\cdot e^{1-7x}=\dfrac{e^{3x^2+2}}{e^{2x+1}}$ $\qquad D_E=\mathbb{R}$

   $e^{6x+2+1-7x}=e^{3x^2+2-2x-1}$

   $-x+3=3x^2-2x+1$

   $-3x^2+x+2=0$

   $\Delta=25 \;\; x_1=-\frac{2}{3} \;\; x_2=1$

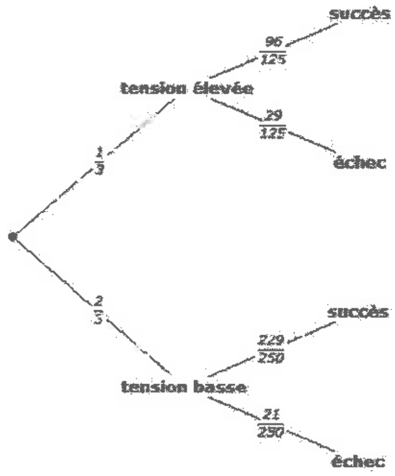
   $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

**Exercice 5 (3+2=5 points)**

1. $F'(x)=\frac{3e^{3x}\cdot(e^{3x}+1)-e^{3x}\cdot 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}=\frac{3e^{3x}(e^{3x}+1-e^{3x})}{(e^{3x}+1)^2}=\frac{3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}=f(x)$. Donc $F$ est une primitive de $f$.
2. $\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=\frac{e^3}{e^3+1}-\frac{1}{2}\simeq 0,453$

**Exercice 6 (2+2+2+1=7 points)**

1. arbre
2. $p=\frac{1}{3}\cdot\frac{96}{125}+\frac{2}{3}\cdot\frac{229}{250}=\frac{13}{15}\simeq 0,87$
3. $p=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{229}{250}}{\frac{13}{15}}=\frac{229}{325}\simeq 0,70$
4. $p=\frac{1}{3}\cdot\frac{29}{125}=\frac{29}{375}\simeq 0,08$




**Exercice 7 (2+3=5 points)**

S : « obtenir une pièce défectueuse »
$p=0,04$
$\overline{S}$ : « ne pas obtenir une pièce défectueuse »
$q=1-p=0,96$

1. $p(S_{200}=0)=C_{200}^0\cdot(0,04)^0\cdot(0,96)^{200}\simeq 0,0003$
2. $p(S_{200}\geq 2)=1-p(S_{200}=0)-p(S_{200}=1)=1-C_{200}^0\cdot 0,04^0\cdot 0,96^{200}-C_{200}^1\cdot 0,04^1\cdot 0,96^{199}\simeq 0,997$

**Exercice 8 (1+1+1+1+2+2+3=11 points)**

1. $r\simeq 0,987$. Comme $r$ est proche de 1 un ajustement affine est valable. **(1)**
2. $y=373,2x+2276$ **(1)**
3.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i=\ln y_i$ | 7,770 | 7,884 | 7,991 | 8,108 | 8,199 | 8,370 |

**(1)**

4. $z=0,116x+7,764$ **(1)**
5. $z=0,116x+7,764\Rightarrow \ln y=0,116x+7,764\Rightarrow y=e^{0,116x+7,764}$ **(2)**
6. $6000=e^{0,116x+7,764}\Rightarrow \ln(6000)=0,116x+7,764\Rightarrow x=\frac{\ln(6000)-7,764}{0,116}\Rightarrow x\simeq 8,065$ **(2)**
   Donc en 2016 le chiffre d'affaire dépassera 6000000€.
7. Ajustement affine : $y=373,2\cdot 6+2276=4515,2$ **(3)**
   Ajustement exponentiel : $y=e^{0,116\cdot 6+7,764}\simeq 4722,058$
   Donc l'ajustement exponentiel semble le mieux estimer le chiffre d'affaire pour l'année 2013.