Branche : Mathématiques II

Question 1 *(6 points)*

1 pt. Posons : $u=\frac{z}{z'}$ Alors : $z=u\cdot z'$

1) $|z|=|u\cdot z'|=|u|\cdot|z'|$,

2 pt. donc : $\left|\frac{z}{z'}\right|=|u|=\frac{|z|}{|z'|}$

2) $\arg(z)=\arg(u\cdot z')=\arg(u)+\arg(z') \quad (\text{mod}2\pi)$

2 pt. donc : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(u)=\arg(z)-\arg(z') \quad (\text{mod}2\pi)$

Question 2 *(5+3+2 = 10 points)*

a)

1 pt. $z_A \;=i\cdot\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\underline{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}$ forme exponentielle

1 pt. $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}}$ forme algébrique

1 pt. $z_B=\frac{1}{3}\left(-4\sqrt{3}+i4\sqrt{3}\right)=\underline{-\frac{4\sqrt{3}}{3}+i\frac{4\sqrt{3}}{3}}$ forme algébrique

$|z_B|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

2 pt. $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_B=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\theta_B=\frac{3\pi}{4}$ *Donc* $z_B=\underline{\frac{4\sqrt{6}}{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ forme exponentielle

1 pt. *b) ABOC* est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow z_B-z_A=\cancel{z_O}-z_C\Leftrightarrow z_C=z_A-z_B\Leftrightarrow z_C=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)+i\left(\frac{3}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

2 pt. $\left(\Leftrightarrow z_C=\frac{11\sqrt{3}}{6}+i\frac{9-8\sqrt{3}}{6}\right)$

c) Si *I* est l'intersection des diagonales, alors *I* est le milieu de $[AO]$.

2 pt. $z_I=\frac{z_A+z_O}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{3}{4}}$

Question 3 *(5 points)*

M appartient à la région grise si *M* est sur le disque de centre *A* et de rayon *AB* <u>et</u> si M est plus proche de *B* que de *A*.

$z_A=2-i \qquad z_B=-1+i \qquad AB=|z_B-z_A|=|-1+i-2+i|=|-3+2i|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$ 1 pt.

M appartient à la région coloriée $\Leftrightarrow|z-z_A|\le\sqrt{13}$ *et* $|z-z_B|\le|z-z_A|$

2 pt. $\Leftrightarrow|z-(2-i)|\le\sqrt{13}$ *et* $|z-(-1+i)|\le|z-(2-i)|$ 2 pt.

Question 4 *(3+2 = 5 points)*

a) $|z-3-2i|=|\bar{z}+2-i| \Leftrightarrow |x+iy-3-2i|=|x-iy+2-i|$ 1 pt.

$$\Leftrightarrow |(x-3)+i(y-2)|=|(x+2)+i(-y-1)| \qquad |\ (\ )^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(-y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}+2y+1$$

$$\Leftrightarrow -10x-6y+8=0$$

$$\Leftrightarrow 5x+3y-4=0 \qquad \left(\Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}\right)$$

Δ est la droite d'équation $5x+3y-4=0$. 2 pt.

b) $|z-3-2i|=\left|\overline{\bar{z}+2-i}\right| \Leftrightarrow |z-(3+2i)|=|z+2+i| \Leftrightarrow |z-(3+2i)|=|z-(-2-i)|$

Δ est la médiatrice de $[AB]$ avec $z_A=3+2i$ et $z_B=-2-i$. 2 pt.

Question 5 *(2+2+2+3 = 9 points)*

2 pt. a) $\overrightarrow{AB}(-1;0;-3)$ $\qquad \overrightarrow{AC}(-2;6;-6)$

Les composantes ne sont pas proportionnelles et ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

2 pt. b) $\left.\begin{array}{l}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+0+3=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-6+0+6=0\end{array}\right\}$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ et ainsi vecteur normal à (ABC).

2 pt. c) $M(x;y;z)\in(ABC) \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 3(x-2)+0(y+1)-1(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-z-2=0$

4 pt. d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{BAC}\right) \Rightarrow \cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{2+0+18}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{76}}=\dfrac{\sqrt{190}}{19}$

$\widehat{BAC}\simeq 43{,}49°$

Question 6 *(2+3+6=11 points)*

a) $\overrightarrow{n_1}(-1;3;1)$ est vecteur normal à P_1 et $\overrightarrow{n_2}(2;-3;0)$ est normal à P_2.

Les composantes de $\overrightarrow{n_1}$ et de $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ. 2 pt.

b) $\Delta:\begin{cases}-x+3y+z+1=0 & (1)\\ 2x-3y-5=0 & (2)\end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow x+z-4=0 \Rightarrow \underline{z=-x+4}$

2 pt. $(2) \Rightarrow 3y=2x-5 \Rightarrow \underline{y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}}$

x prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose $x = t$:

1 pt. Donc $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{3} \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$

c) $A\left(0;-\dfrac{5}{3};4\right)$ est un point de Δ et $\vec{u}\left(1;\dfrac{2}{3};-1\right)$ est un vecteur directeur de Δ. $\overrightarrow{n_3}(-3;1;3)$ est un vecteur normal à P_3 .

1 pt. $\vec{u} \cdot \vec{n} = -3 + \dfrac{2}{3} - 3 = -\dfrac{16}{3} \neq 0$ Donc Δ et P_3 sont sécants en un point I.

1 pt. $I(x;y;z)$ appartient à Δ et P_3 ssi $\begin{cases} -3x + y + 3z - 2 = 0 & (1) \\ x = t & (2) \\ y = \dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{3} & (3) \\ z = -t + 4 & (4) \end{cases}$

2 pt. $(2),(3)(4) dans (1) \Rightarrow -3t + \left(\dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{3}\right) + 3(-t+4) - 2 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{25}{16}$

1 pt. Maintenant $x = \dfrac{25}{16}; y = \dfrac{-5}{8}; z = \dfrac{39}{16}$ et $I\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{-5}{8};\dfrac{39}{16}\right)$.

Question 7 *(7 points)*

1 pt. $\overrightarrow{AB}(-1;-1;3)$ est un vecteur directeur de (AB) et $\vec{u}(1;2;-2)$ est un vecteur directeur de Δ.

1 pt. Les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\vec{u}$ ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi (AB) et Δ ne sont pas parallèles.

1 pt. Une équation paramétrique de (AB) s'écrit : $(AB) : \begin{cases} x = -s + 2 \\ y = -s - 5 \\ z = 3s + 1 \end{cases} \qquad , s \in \mathbb{R}$.

(AB) et Δ sont sécantes ssi il existe t et s tels que :

$$\begin{cases} t + 3 = -s + 2 \\ 2t - 2 = -s - 5 \\ -2t = 3s + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + s + 1 = 0 & (1) \\ 2t + s + 3 = 0 & (2) \\ -2t - 3s - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

3 pt. $(2) + (3) \Rightarrow -2s + 2 = 0 \Rightarrow s = 1$

Dans $(2) \Rightarrow 2t + 4 = 0 \Rightarrow t = -2$

1 pt. Cette solution est compatible avec (1) donc (AB) et Δ sont sécantes en un point

Question 8 *(3+1+2+2 = 8 points)*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit $A(-1;-3;0)$, $B(0;-1;2)$ et $C(1;0;-2)$ trois points non-alignés de l'espace.

1 pt.

a) $\overrightarrow{AB}(1;2;2)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC}(2;3;-2)$

2 pt.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-10\vec{i}+6\vec{j}-1\vec{k}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-10;6;-1)$

1 pt.

b) $A_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{100+36+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{137}\simeq 5{,}85\ u.a.$

c) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-10;6;-1)$ est un vecteur normal à (ABC).

$M(x;y;z)\in(ABC)$

2 pt.

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$\Leftrightarrow -10(x+1)+6(y+3)-1(z-0)=0$

$\Leftrightarrow \underline{-10x+6y-z+8=0}$

1 pt.

d) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-10;6;-1)$ est un vecteur directeur de Δ.

Une équation paramétrique de Δ s'écrit alors :

1 pt.

$$\Delta:\begin{cases}x=-10t\\ y=6t-3\\ z=-t+2\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}$$