I. On a : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 2 + 2i = 2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

2)
$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} \cdot \frac{2 - 2i}{2 - 2i} \\
&= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i + 2\sqrt{6}i + 2\sqrt{6}}{4 + 4} \\
&= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} + \frac{-2\sqrt{2}i + 2\sqrt{6}i}{8} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i
\end{aligned}
$$

3) $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(4 + 2 + 1 = 7 points)

---

II. 1) a)
$$
\begin{aligned}
|2 - \bar{z}| &= |iz - 1| \\
\left|\overline{2 - \bar{z}}\right| &= |iz - 1| \cdot |i| \\
|2 - z| &= |i^2 z - i| \\
|2 - z| &= |-z - i| \\
|z - 2| &= |z + i|
\end{aligned}
$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$ avec A(2) et B(-i).

b)
$$
\begin{aligned}
\arg\left(-\frac{i}{z}\right) &= \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\
\arg\left(\frac{i}{z}\right) &= \frac{\pi}{3} + \pi \quad [2\pi] \\
\arg(i) - \arg(z) &= \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi] \\
\frac{\pi}{2} - \arg(z) &= \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi] \\
\arg(z) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi] \\
\arg(z) &= -\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]
\end{aligned}
$$

L'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \dfrac{-5\pi}{6}$.

2) $z' = \dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ *avec* $z \neq 1$

$= \dfrac{(1-i)(x+iy-i)}{x+iy-1}$ *avec* $(x;y) \neq (1;0)$

$= \dfrac{(x+y-1)+i(y-x-1)}{(x-1)+iy} \cdot \dfrac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$

$= \dfrac{(x+y-1)(x-1)+i(x-1)(y-x-1)-iy(x+y-1)+(y-x-1)y}{(x-1)^2+y^2}$

$$\mathrm{Re}(z') = \frac{(x+y-1)(x-1)+(y-x-1)y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2-x+xy-y-x+1+y^2-xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{(x^2-2x+1)+(y^2-2y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$\mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)-1=0$ *avec* $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1$ *avec* $(x;y) \neq (1;0)$

$\Gamma$ est le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 1 privé du point A.

**( (3 + 3) + 7 = 13 points)**

---

III. 1) Théorème 1 page 322

2) $\overrightarrow{AB}(-2;2;-1)$ $\quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$\overrightarrow{AC}(-1;1;-4)$ $\quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{2+2+4}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{8}{9\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{9\cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$\widehat{BAC} \cong 51{,}1°$

**(5 + 3 = 8 points)**

---

IV. $\vec{u}(1\,;-2\,;1)$ et $\vec{v}(2\,;1\,;-1)$ ne sont pas colinéaires, donc d et d' ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 1+t = 2s+2 \\ 3-2t = s-4 \\ -2+t = -s+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t-2s=1 & (1) \\ 2t+s=7 & (2) \\ t+s=4 & (3) \end{cases}$$

(3): $t = 4-s$

dans (1):
$4-s-2s=1$
$4-3s=1$
$-3s=-3$
$s=1$

dans (2):
$2(4-s)+s=7$
$8-2s+s=7$
$-s=-1$
$s=1$

compatible

donc s = 1 , t = 3.

Les droites d et d' sont ainsi sécantes et par conséquent coplanaires.

(4 points)

V.

1) $\overrightarrow{n_1}(1\,;-1\,;2)$ et $\overrightarrow{n_2}(1\,;1\,;1)$ ne sont pas colinéaires, donc $P_1$ et $P_2$ sont sécants .

2) $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ x+y+z-11=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x+2z-4 \\ x+(x+2z-4)+z-11=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x+2z-4 \\ 2x+3z-15=0 \end{cases}$

$\begin{cases} z=-\frac{2}{3}x+5 \\ y=x+2\cdot\left(-\frac{2}{3}x+5\right)-4 \end{cases}$

$\begin{cases} z=-\frac{2}{3}x+5 \\ y=-\frac{1}{3}x+6 \end{cases}$

Posons $x=-3t$ , $t\in\mathbb{R}$ .

$\begin{cases} x=-3t \\ y=t+6 \\ z=2t+5 \end{cases}$

3) $\overrightarrow{n_3}(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{u}(-3\,;1\,;2)$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_3}=-6+1-2\neq 0$

donc d et $P_3$ ne sont pas parallèles, ainsi ils sont sécants.

$\begin{cases} x=-3t \\ y=t+6 \\ z=2t+5 \\ 2x+y-z-8=0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2\cdot(-3t)+t+6-(2t+5)-8&=0 \\ -6t+t+6-2t-5-8&=0 \\ -7t-7&=0 \\ -7t&=7 \\ t&=-1 \end{aligned}$$

$d\cap P_3=\{I(3\,;5\,;3)\}$

Ainsi, $P_1\cap P_2\cap P_3=\{I(3\,;5\,;3)\}$

(1 + 4 + 4 = 9 points)

VI.

1) $\overrightarrow{AB}(-2\,;1\,;2)$ et $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) et P ne sont pas perpendiculaires.

2) $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}$ est un vecteur normal à Q.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \qquad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}(-3\,;2\,;-4)$$

3) $-3x + 2y - 4z + d = 0$

Or $A \in Q$: $\quad -3 + 4 - 12 + d = 0$

$$d = 11$$

$Q: -3x + 2y - 4z + 11 = 0$

$$3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

(1 + 2 + 2 = 5 points)

---

VII. 1) $\overrightarrow{AB}(1\,;2\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;1\,;2)$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

2) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \qquad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(5\,;-2\,;1)$$

(ABC) : $\quad 5x - 2y + z + d = 0$

Or $A \in (ABC)$: $\quad 5 + 6 + 2 + d = 0$

$$d = -13$$

(ABC) : $5x - 2y + z - 13 = 0$

3) $\text{Aire}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{25+4+1} = \frac{1}{2}\sqrt{30} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

4) $D \in (ABC) \quad \Leftrightarrow 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 5 - 13 = 0$

$$\Leftrightarrow 15 + 4 + 5 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11 = 0$$

impossible , donc $D \notin (ABC)$

5) $\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = -2t - 2 \\ z = t + 5 \end{cases}$ , $t \in \mathbb{R}$

6) $H \in d$ et $H \in (ABC)$

$$\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = -2t - 2 \\ z = t + 5 \\ 5x - 2y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

$$5 \cdot (5t + 3) - 2(-2t - 2) + (t + 5) - 13 = 0$$
$$25t + 15 + 4t + 4 + t + 5 - 13 = 0$$
$$30t + 11 = 0$$
$$t = -\frac{11}{30}$$

$$x_H = 5\left(-\frac{11}{30}\right) + 3 = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$
$$y_H = -2\left(-\frac{11}{30}\right) - 2 = \frac{22}{30} - \frac{60}{30} = -\frac{38}{30} = -\frac{19}{15}$$
$$z_H = -\frac{11}{30} + 5 = \frac{139}{30}$$

donc $H\left(\frac{7}{6}; -\frac{19}{15}; \frac{139}{30}\right)$.

7) La distance du point D au plan (ABC) est égale à $DH = \sqrt{\left(\frac{-55}{30}\right)^2 + \left(\frac{22}{30}\right)^2 + \left(\frac{-11}{30}\right)^2} = \frac{11\sqrt{30}}{30}$.

(1 + 3 + 1 + 1 + 2 + 4 + 2 = 14 points)