Corrigé

Ex 1

1) $e^{x(x-1)} < e$ cond: /

$\iff x(x-1) < 1$

$\iff x^2 - x - 1 < 0$ $\Delta = 5$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
x^2-x-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$ (4pts)

2) $2e^{-4x+2} e^{x+4} = 8$ cond: /

$\iff e^{-4x+2+x+4} = 4$

$\iff -3x + 6 = \ln 4$

$\iff -3x = 2\ln 2 - 6$

$\iff x = 2 - \frac{2}{3}\ln 2$

$S = \left\{ 2 - \frac{2}{3}\ln 2 \right\}$ (4pts)

3) $\ln(x+6) \leq \ln(6x) - \ln(9-x)$ (*)

cond: $x + 6 > 0$ et $6x > 0$ et $9 - x > 0$
$x > -6$ $x > 0$ $x < 9$

$x \in E =]0, 9[$ (2pts)

$(\forall x \in E)$: (*) $\iff \ln(x+6)(9-x) \leq \ln 6x$

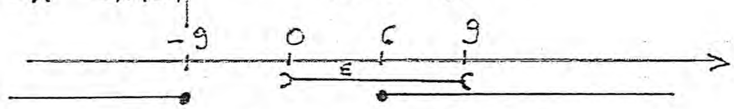
$\iff -x^2 + 3x + 54 \leq 6x$

$\iff -x^2 - 3x + 54 \leq 0$ $\Delta = 9 + 4 \cdot 54 = 15^2$ (2pts)

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 15}{-2}$ $\nearrow 6$ $\searrow -9$

x		-9		6	
$-x^2-3x+54$	$-$	0	$+$	0	$-$

(2pts)



$S = \left( ]-\infty, -9] \cup [6, +\infty[\right) \cap E$ (1 pt)

$= [6, 9[$

<u>Ex 2</u> $f(x) = -\ln(8-4x) + 2$

1) cond: $8-4x > 0$
$\Leftrightarrow -4x > -8$
$\Leftrightarrow x < 2$ $\quad D_f =]-\infty, 2[= D_{f'}$ (1pt)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} [\underbrace{-\ln(\underbrace{8-4x}_{\to+\infty})}_{\to-\infty}+2] = -\infty$ $\quad \cancel{AH}$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to 2^-} [\underbrace{-\underbrace{\ln(\underbrace{8-4x}_{\to 0^+})}_{\to-\infty}}_{\to+\infty}+2] = +\infty$ $\quad AV : x = 2$ (1+1pts)

3) <u>$C_f \cap (Oy)$</u>: $\quad f(0) = -\ln(8-4\cdot 0)+2$
$= -\ln 8 + 2$
$= -3\ln 2 + 2$

$A(0; -3\ln 2 + 2)$ (1pt)

<u>$C_f \cap (Ox)$</u>: $\quad f(x) = 0$
$\Leftrightarrow -\ln(8-4x)+2 = 0$
$\Leftrightarrow \ln(8-4x) = 2$
$\Leftrightarrow 8-4x = e^2$
$\Leftrightarrow -4x = -8+e^2$
$\Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{4}e^2$

$B(2-\frac{1}{4}e^2; 0)$ (2pts)

4) $(\forall x \in]-\infty, 2[)$: $f'(x) = [-\ln(8-4x)+2]'$

$$= -\frac{(8-4x)'}{8-4x} + 0$$

$$= -\frac{-4}{8-4x}$$

$$= \frac{4}{4(2-x)}$$

$$= \frac{1}{2-x}$$ (2pts)

Ex3

$f(x) = 2e^{-x}(x-1)$ et $F(x) = -2xe^{-x}$

$D_f = D_F = \mathbb{R}$

1) $(\forall x \in \mathbb{R})$: $F'(x) = (-2x)'e^{-x} + (-2x)\cdot(e^{-x})'$

$= -2e^{-x} - 2x\, e^{-x}\cdot(-1)$

$= 2e^{-x}(-1+x)$

$= f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (2pts)

2) $G(x) = F(x) + c$

$G(-1) = 0 \iff -2\cdot(-1)e^{-(-1)} + c = 0$

$\iff 2e + c = 0$

$\iff c = -2e$

$G(x) = -2xe^{-x} - 2e$ (2pts)

Ex4

1) bénéfice mensuel pour x tonnes en € :

$B(x)$ = prix de vente − coût de production

$= 6000x - x(20x^2 - 450x + 2760)$

$= -20x^3 + 450x^2 + 3240x$ (2pts)

2) $B(30) = -20\cdot 27000 + 450\cdot 900 + 3240\cdot 30$

$= -37800$

Une production et vente de 30t par mois génère une perte mensuelle de 37800 €. (2pts)

3) $B'(x) = -60x^2 + 900x + 3240$

$\Delta = 1587600 = 1260^2$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-900 \pm 1260}{-120}$ ⟨ -3, 18

x		-3		18	
$-60x^2+900x+3240$	$-$	0	$+$	0	$-$

x	0		18		$+\infty$
$B'(x)$	//	$+$	0	$-$	

4) Le bénéfice mensuel est maximal pour une production de 18 tonnes ($x = 18$).
Le montant du bénéfice maximal est
$$B(18) = 87\,480 \text{ €}$$ (1pt)

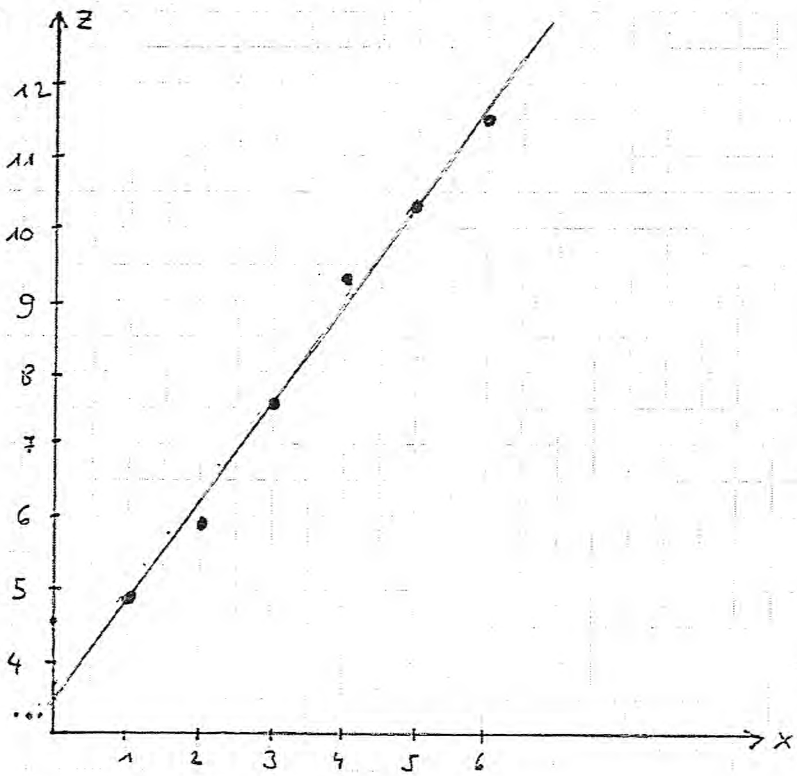
Ex5

1) (a)

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	$\sim 4{,}91$	$5{,}94$	$\sim 7{,}61$	$\sim 9{,}28$	$\sim 10{,}30$	$\sim 11{,}50$

(1pt)

(b)



(2pts)

2) (a) $z = 1{,}36x + 3{,}49$ (1pt)

x	0	5
z	3,49	10,29

1pt pour tracer cette droite

(b) $z = \ln y$ $\quad y = e^z$

$y = e^{1{,}36x + 3{,}49}$

$y = e^{3{,}49} \cdot e^{1{,}36x}$

$y = 32{,}79\, e^{1{,}36x}$ (2pts)

(c) $y_{15} = 32{,}79 \cdot e^{1{,}36 \cdot 15}$

$y_{15} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{10}$ = 24 milliards de personnes (1pt.)

(d) Comme il n'y a que 7 milliards d'êtres humains sur terre, le résultat précédent n'est pas plausible. Le modèle n'est plus valable après plusieurs semaines. (1pt)

<u>Ex6</u> $p = 90\% = 0{,}9 \qquad q = 1 - p = 0{,}1$

A est l'événement : « il touche au moins 13 fois la cible parmi 15 essais »

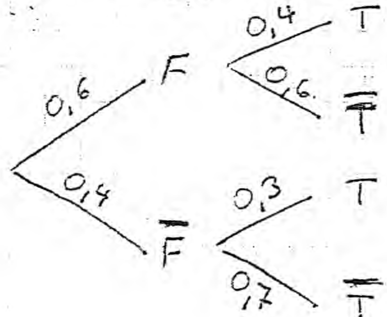
$$p(A) = \underbrace{C_{15}^{15}\, 0{,}9^{15} \cdot 0{,}1^{0}}_{15 \text{ réussites}} + \underbrace{C_{15}^{14}\, 0{,}9^{14} \cdot 0{,}1^{1}}_{14 \text{ réussites}} + \underbrace{C_{15}^{13}\, 0{,}9^{13} \cdot 0{,}1^{2}}_{13 \text{ réussites}}$$

$$= 0{,}9^{15} + 15 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}1 + \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 0{,}9^{13} \cdot 0{,}1^{2}$$

$$= 0{,}8159\ldots$$

$$\simeq 82\,\% \qquad (4\text{pts})$$

<u>Ex7</u> 1)



(a) $p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 0{,}4$ (1pt)

$p(F \text{ et } T) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$ (1pt)

$p(\bar{F} \text{ et } T) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$ (1pt)

(b) $p(T) = p(F \text{ et } T) + p(\bar{F} \text{ et } T)$

$= 0{,}24 + 0{,}12$

$= 0{,}36$

$= 36\,\%$ (2pts)

2) $$p(F / \bar{T}) = \frac{p(F \text{ et } \bar{T})}{p(\bar{T})}$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{p(F \text{ et } \bar{T}) + p(\bar{F} \text{ et } \bar{T})} \qquad (3\text{pts})$$

$$= \frac{0{,}36}{0{,}36 + 0{,}4 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}36}{0{,}36 + 0{,}4 \cdot 0{,}7} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

(56,25 %)

Ex 8

1. $f(x) = -x + 6 - \frac{5}{x}$ $\qquad D_f =]0, +\infty[$

$C_f \cap (Ox)$: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 6 - \frac{5}{x} = 0 \quad | \cdot x \neq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)$

$= 16 = 4^2$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \nearrow 1, \searrow 5$

$A(1,0) \quad B(5,0)$ (2pts)

2. $\mathcal{A} = \int_1^5 f(x)\, dx$

$= \int_1^5 \left(-x + 6 - \frac{5}{x}\right) dx$

$= \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - 5\ln x\right]_1^5$

$= \left(-\frac{25}{2} + 30 - 5\ln 5\right) - \left(-\frac{1}{2} + 6 - 5 \cdot 0\right)$

$\simeq 3{,}95$ (u.a.) (2pts)